JEE ADVANCED
27 September 2020
Physics Paper - 2

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each question is a **SINGLE DIGIT INTEGER** ranging from 0 to 9. **BOTH INCLUSIVE**.
- For each question, enter the correct integer corresponding to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks	: +3	If ONLY the correct integer is entered;
Zero Marks	: 0	If the question is unanswered;
Negative Marks	: –1	In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

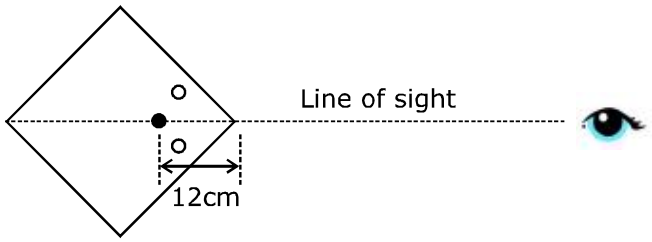
- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +3	केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक	: –1	अन्य सभी स्थितियों में।

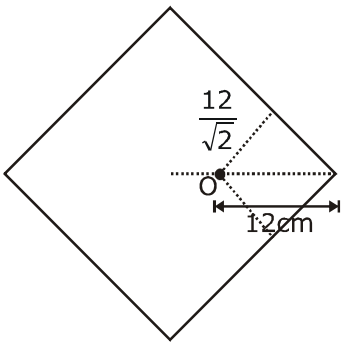
---

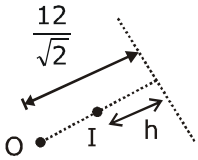
1. A large square container with thin transparent vertical walls and filled with water (refractive index $\frac{4}{3}$) is kept on a horizontal table. A student holds a thin straight wire vertically inside the water 12 cm from one of its corners, as shown schematically in the figure. Looking at the wire from this corner, another student sees two images of the wire, located symmetrically on each side of the line of sight as shown. The separation (in cm) between these images is _____.

पतली पारदर्शी ऊर्ध्वाधर दीवारों के साथ एक बड़ा वर्गाकार पात्र है तथा पानी (अपवर्तनांक $\frac{4}{3}$) से भरा है, जो एक क्षैतिज टेबल पर रखा है। एक विद्यार्थी चित्रानुसार इसके एक कोने से 12 cm पानी के अन्दर ऊर्ध्वाधर रूप से एक पतले सीधे तार को पकड़े (hold) रखता है। इस कोने से तार पर देखते हुए, अन्य विद्यार्थी तार के दो प्रतिबिम्बों को देखता है, जो दिखायेनुसार दृश्य रेखा के प्रत्येक तरफ (side) सममित रूप से स्थित है। इन प्रतिबिम्बों के बीच दूरी (cm में) हैं–



Sol. **(Official Answer Bonus : Marks to all)**
Probable Answer : 3 or 4 or 5
(for 3)
When ray is normally incident

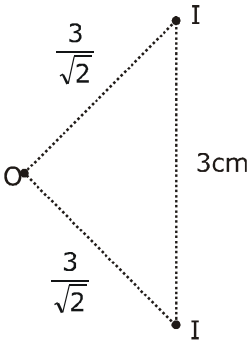




$h \rightarrow$ apparent depth

$$\frac{h}{\frac{12}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

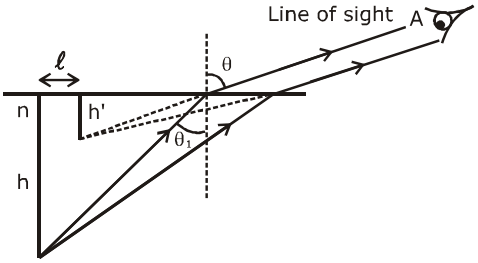
$$h = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

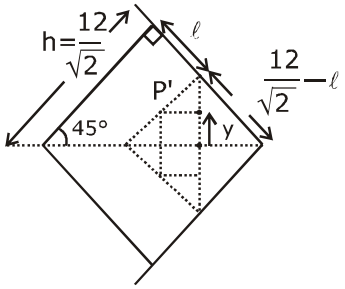


So, distance between images will be 3 cm.

For 4 or 5

We will use formula : $h' = \dfrac{n^2 h \cos^3\theta}{(n^2 - \text{Sin}^2\,\theta)^{3/2}}$





$\ell = h\tan\theta_1 - h'\tan\theta$

$\therefore$ For this situation θ = 45°

$\dfrac{4}{3}.\sin\theta_1 = 1.\sin 45°$

$\sin\theta_1 = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$

$\theta_1 \approx 32°$

$\therefore \tan\theta_1 = 0.62$

n = 4/3

$\theta = 45°$

$h = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$

$$\therefore h' = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{12}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{3/2}} = 3.7\text{cm}$$

$\ell = \dfrac{12}{\sqrt{2}}.0.62 - 3.7 \times 1 = 1.56\text{cm}$

$y = \left(\dfrac{12}{\sqrt{2}} - \ell\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{h'}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Answer $= 2y = \left[12 - (\ell + h').\sqrt{2}\right]$

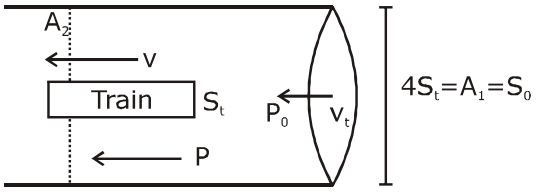
$= 12 - 5.26 \times \sqrt{2} = 4.56$

Answer : 4 or 5

2. A train with cross-sectional area S_t is moving with speed v_t inside a long tunnel of cross-sectional area S_0 ($S_0 = 4S_t$). Assume that almost all the air (density ρ) in front of the train flows back between its sides and the walls of the tunnel. Also, the air flow with respect to the train is steady and laminar. Take the ambient pressure and that inside the train to be p_0. If the pressure in the region between the sides of the train and the tunnel walls is p, then $p_0 - p = \frac{7}{2N}\rho v_t^2$. The value of N is _____.

S_t अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक ट्रेन, S_0 ($S_0 = 4S_t$) अनुप्रस्थ–काट क्षेत्रफल की एक लम्बी सुरंग के अन्दर v_t चाल से गतिमान है। माना कि ट्रेन के सामने लगभग पूरी हवा (घनत्व ρ) इसके बाजुओ (sides) तथा सुरंग की दीवारों के बीच वापस बहती है। साथ ही, ट्रेन के सापेक्ष हवा का प्रवाह स्थिर तथा पटलीय है। ट्रेन के अन्दर व्यापक (ambient) दाब ρ_0 लेते है। यदि ट्रेन की बाजुओ तथा सुरंग की दीवारों के बीच क्षेत्र में दाब p है, तब $p_0 - p = \frac{7}{2N}\rho v_t^2$ है। तब N का मान है–

Sol. **9**



$A_2 = 3S_t$

Equation of continuity

$v_t 4S_t = 3S_t v$

$v = \frac{4}{3} v_t$

Using Bernoulli's equation

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_t^2 = P + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{4}{3}v_t\right)^2$$

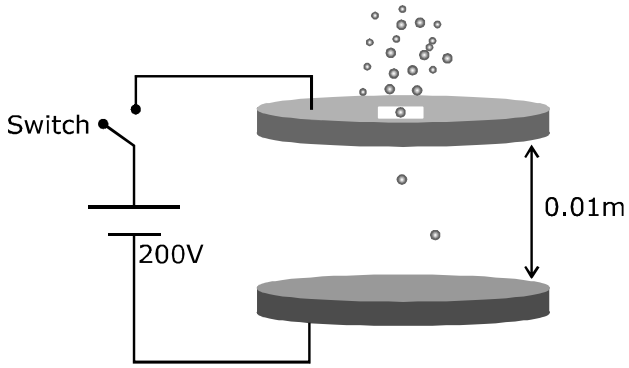
$$P_0 - P = \frac{7}{18}\rho v_t^2$$

Now compare from given value

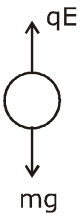
N = 9

3. Two large circular discs separated by a distance of 0.01 m are connected to a battery via a switch as shown in the figure. Charged oil drops of density 900 kg m^{-3} are released through a tiny hole at the center of the top disc. Once some oil drops achieve terminal velocity, the switch is closed to apply a voltage of 200 V across the discs. As a result, an oil drop of radius 8×10^{-7} m stops moving vertically and floats between the discs. The number of electrons present in this oil drop is _____. (neglect the buoyancy force, take acceleration due to gravity =10 ms^{-2} and charge on an electron (e) = 1.6×10^{-19} C)

0.01 m दूरी से पथक् दो बड़ी वत्तीय चकतियाँ चित्रानुसार एक स्विच के माध्यम से एक बैट्री से जोड़ी जाती है। 900 kg m^{-3} घनत्व की आवेशित तेल की बून्दें ऊपरी चकती के केन्द्र पर एक छोटे छिद्र से छोड़ी जाती है। एक बार जब कुछ तेल की बून्दें सीमान्त वेग प्राप्त कर लेती है, तब चकतीयों के सिरों पर 200 V की वोल्टता प्रदान करने के लिए स्विच बन्द किया जाता है। परिणामस्वरूप, 8×10^{-7} m त्रिज्या की एक तेल बून्द ऊर्ध्वाधर गति बन्द करती है तथा चकतीयों के बीच चलायमान (floats) है। इस तेल बून्द में उपस्थित इलेक्ट्रॉनों की संख्या है (उत्पलावन बल नगण्य है, गुरूत्वीय त्वरण =10 ms^{-2} तथा इलेक्ट्रॉन पर आवेश (e) = 1.6×10^{-19} C)



Sol. **6**



$qE = mg$ ....(i)

$q = ne$

$V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{d}$

from equation (i)

$ne\,\frac{V}{d} = mg$

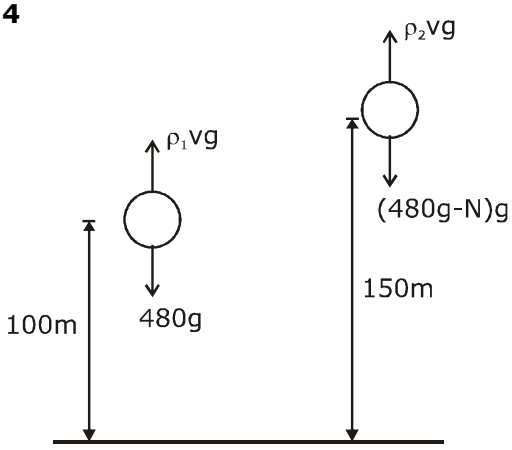
$$n = \frac{mgd}{eV} = 900 \times \frac{4\pi}{3} \times \frac{8\times8\times8\times10^{-21}\times10\times0.01}{1.6\times10^{-19}\times200}$$

$n = 6.02 \approx 6$

4. A hot air balloon is carrying some passengers, and a few sandbags of mass 1 kg each so that its total mass is 480 kg. Its effective volume giving the balloon its buoyancy is V. The balloon is floating at an equilibrium height of 100 m. When N number of sandbags are thrown out, the balloon rises to a new equilibrium height close to 150 m with its volume V remaining unchanged. If the variation of the density of air with height h from the ground is $\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$, where $\rho_0 = 1.25$ kg m^{-3} and $h_0 = 6000$ m, the value of N is _____.

एक गर्म हवा का गुब्बारा कुछ यात्रियों तथा प्रत्येक 1 kg द्रव्यमान के कुछ रेत के बेगों को ले जा रहा है, ताकि इसका कुल द्रव्यमान 480 kg है। गुब्बारे को इसका उत्पलावन देने वाला इसका प्रभावी आयतन V है। गुब्बारा 100 m की साम्य ऊँचाई पर चलायमान (floating) है। जब N रेत के बेग बहार फैंके जाते हैं, तब गुब्बारा 150 m के समीप नई साम्य ऊँचाई तक बढ़ता है जहाँ इसका आयतन भी अपरिवर्तित रहता है। यदि धरातल से h ऊँचाई के साथ हवा के घनत्व का परिवर्तन $\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}}$ है, जहाँ $\rho_0 = 1.25$ kg m^{-3} तथा $h_0 = 6000$ m है। तब N का मान है–

Sol. **4**



$\rho_1 vg = 480\ g$

$\rho_2 vg = (480 - N)\ g$

$$\frac{\rho_0 e^{-\frac{100}{6000}} vg}{\rho_0 e^{-\frac{150}{6000}} vg} = \frac{480}{480 - N}$$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{120}} = \frac{480}{480-N} \Rightarrow 480 - N = \frac{480}{e^{\frac{1}{120}}}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{120}} (480 - N) = 480$

$N = 480 (1 - e^{-\frac{1}{120}})$

$N = 480 (1 - 0.9917)$

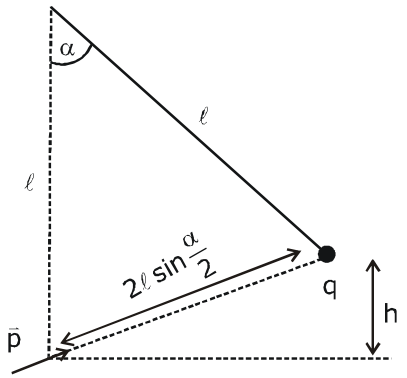
$N = 480 \times 0.008$

$N = 3.98$

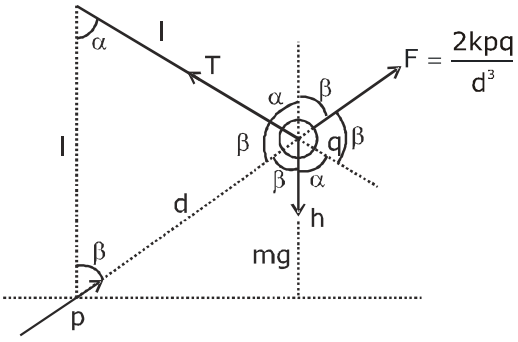
$N \approx 4$

5. A point charge q of mass m is suspended vertically by a string of length ℓ. A point dipole of dipole moment $\vec{p}$ is now brought towards q from infinity so that the charge moves away. The final equilibrium position of the system including the direction of the dipole, the angles and distances is shown in the figure below. If the work done in bringing the dipole to this position is N ×(mgh), where g is the acceleration due to gravity, then the value of N is _____ . (Note that for three coplanar forces keeping a point mass in equilibrium, $\frac{F}{\sin\theta}$ is the same for all forces, where F is any one of the forces and θ is the angle between the other two forces)

m द्रव्यमान का एक बिन्दु आवेश q, ℓ लम्बाई की एक रस्सी द्वारा ऊर्ध्वाधर लटकाया जाता है। $\vec{p}$ द्विध्रुव आघूर्ण का एक बिन्दु द्विध्रुव अब अनन्त से q की ओर लाया जाता है ताकि आवेश दूर गति करता है। द्विध्रुव की दिशा, कोण व दूरियाँ को शामिल करते हुए निकाय की अन्तिम साम्यावस्था, नीचे चित्रानुसार है। यदि द्विध्रुव को इस स्थिति तक लाने में किया गया कार्य N ×(mgh) है, जहाँ g गुरूत्वीय त्वरण है, तब N का मान है _____ . (ध्यान देते है कि तीन समतलीय बलों के लिए एक बिन्दु द्रव्यमान को साम्यावस्था में रखते हुए, $\frac{F}{\sin\theta}$ सभी बलों के लिए समान है, जहाँ F बलो में से कोई एक है तथा θ अन्य दो बलो के बीच कोण है।)



Sol. 2



$\because\ \alpha + 2\beta = \pi$

$\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$

$W = mgh + \frac{kpq}{d^2}$

$\frac{T}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{mg}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2kpq}{d^3\sin(2\beta)}$

$\frac{Mg}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2kpq}{d^3\sin(\pi-\alpha)}$

$\frac{Mg}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2kpq}{d^3\sin\alpha}$

$\frac{kpq}{d^2} = \frac{Mg\sin\alpha d}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{Mg\sin\alpha 2l\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{kpq}{d^2} = \frac{Mg2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times 2l\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2} = 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\because\ \cos\beta = \frac{h}{d}$

$$\cos\beta = \frac{h}{2l\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2l}$$

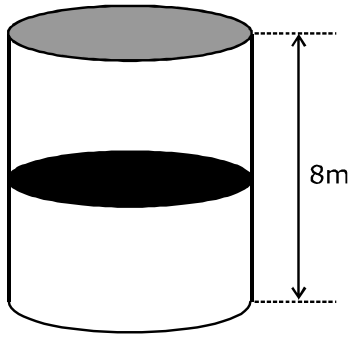
$$\frac{kpq}{d^2} = 2mgl \times \frac{h}{2l} = mgh$$

$$W = mgh + \frac{kpq}{d^2} = mgh + mgh = 2mgh$$

$$N = 2$$

6. A thermally isolated cylindrical closed vessel of height 8 m is kept vertically. It is divided into two equal parts by a diathermic (perfect thermal conductor) frictionless partition of mass 8.3 kg. Thus the partition is held initially at a distance of 4 m from the top, as shown in the schematic figure below. Each of the two parts of the vessel contains 0.1 mole of an ideal gas at temperature 300 K. The partition is now released and moves without any gas leaking from one part of the vessel to the other. When equilibrium is reached, the distance of the partition from the top (in m) will be _____ (take the acceleration due to gravity =10 ms^{-2} and the universal gas constant =8.3 J $mol^{-1}K^{-1}$).

8 m ऊँचाई का एक उष्मीय रूप से विलगित बेलनाकार बन्द पात्र ऊर्ध्वाधर रखा जाता है। यह 8.3 kg द्रव्यमान के एक उष्मा–पार्य (diathermic) (पूर्णतः उष्मीय चालक) घर्षणरहीत विभाजक द्वारा दो समान भागों में विभाजित किया जाता है। इस प्रकार विभाजक प्रारंभ में चित्रानुसार शिखर से 4 m की दूरी पर रखा जाता है। पात्र के प्रत्येक दो भाग 300 K ताप पर एक आदर्श गैस का 0.1 मोल धारण करते है। विभाजक अब छोड़ा जाता है तथा पात्र के एक भाग से दूसरे तक किसी भी गैस के बिना रिसे गति करता है। जब साम्यावस्था प्राप्त की जाती है, तब शिखर से विभाजक की दूरी (m में) होगी (गुरूत्व के कारण त्वरण =10 ms^{-2} तथा सार्वत्रिक गैस नियतांक =8.3 J $mol^{-1}K^{-1}$ लेते है)



Sol. **Official answer : Bonus (Marks to all)**

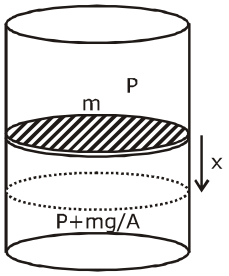
This is because by wrong method we get an integer = 6

<u>Correct Method :</u>

Work done by gravity changes internal energy

$mgx = nc_v\Delta T \qquad \left(C_v = \frac{3}{2}R\right)$

$8.3 \times 10 \times x = 0.2 \times \frac{3}{2} \times 8.3 \times [T_f - 300]$



$\Rightarrow T_f = 300 + \frac{100x}{3} \quad ..(1)$

$\frac{P(4+x) \times A}{T_f} = \frac{\left(P + \frac{mg}{A}\right).(4-x)A}{T_f} = nR$

$\frac{P(4+x) \times A}{T_f} = nR$

$PA = \frac{nRT_f}{4+x}$

$= \frac{0.1 \times 8.3}{4+x} \times (300 + \frac{100}{3}x)$

$= \frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) \qquad ..(2)$

$\frac{\left(P + \frac{mg}{A}\right)(4-x)\,A}{T_f} = nR$

$(PA + mg) = \frac{nRT_f}{4-x} \qquad ..(3)$

$\left[\frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) + 83\right] = \frac{0.83\left(300 + \frac{100}{3}x\right)}{4-x}$ ..... (From (1) and (2))

$\left[\frac{83}{3}\left(\frac{9+x}{4+x}\right) + 83\right] = \frac{83}{3}\left[\frac{9+x}{4-x}\right]$

$\frac{9+x+12+3x}{4+x} = \frac{(9+x)}{4-x}$

$(21+4x)(4-x) = (9+x)(4+x)$

$84 - 21x + 16x - 4x^2 = 36 + 9x + 4x + x^2$

$5x^2+18x-48 = 0$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 960}}{10}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{1284}}{10}$$

$$= \frac{-18 \pm 35.8}{10}$$

$x \approx 1.8$

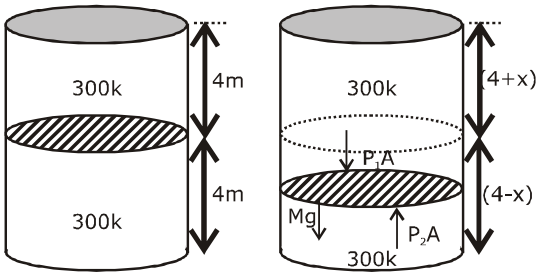
$\therefore y = 4+1.8 = 5.8$

$\simeq 6$

Wrong Method :

As work done by gravity changes internal energy so we can not take temperature constant. But incorrectly by taking temperature constant we get an integer = 6 as answer.

$P_2A = P_1A + mg$ (forces are balanced)



$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$\frac{nRT}{V_2} = \frac{nRT}{V_1} + \frac{mg}{A}$$

$$nRT\left[\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right] = \frac{mg}{A}$$

$$0.1 \times 8.3 \times 300\left[\frac{1}{A(4-x)} - \frac{1}{A(4+x)}\right] = \frac{mg}{A}$$

$$\frac{0.1 \times 8.3 \times 300}{A}\left[\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x}\right] = \frac{8.3 \times 10}{A}$$

$$\frac{4+x-4+x}{16-x^2} = \frac{1}{3}$$

$6x = 16-x^2$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$x = -8, 2$

The distance of the partition from the top = 4+2

= 6m

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

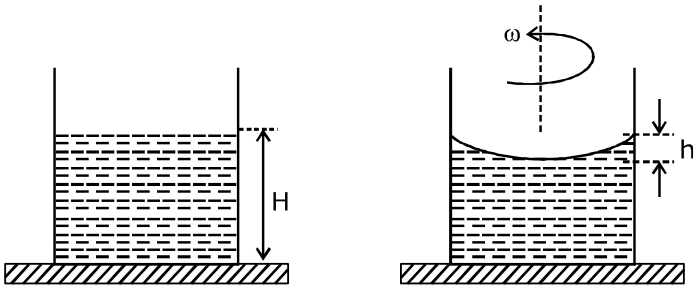
- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. A beaker of radius r is filled with water (refractive index $\frac{4}{3}$) up to a height H as shown in the figure on the left. The beaker is kept on a horizontal table rotating with angular speed ω. This makes the water surface curved so that the difference in the height of water level at the center and at the circumference of the beaker is h (h<<H,h<<r), as shown in the figure on the right. Take this surface to be approximately spherical with a radius of curvature R. Which of the following is/are correct? (g is the acceleration due to gravity)

r त्रिज्या का एक बीकर बायीं ओर चित्रानुसार H ऊँचाई तक पानी (अपवर्तनांक $\frac{4}{3}$) से भरा जाता है। बीकर ω कोणीय चाल से घूमती हुई एक क्षैतिज टेबल पर रखा जाता है। यह पानी की सतह को वक्रीय बनाता है ताकि बीकर की परिधि पर तथा केन्द्र पर पानी के स्तर की ऊँचाई में अन्तर h (h<<H,h<<r) हैं, जैसा दायीं और चित्र में दिखाया है। इस सतह को लगभग R वक्रता त्रिज्या की गोलीय सतह लेते है। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे सही है ?(g गुरूत्व के कारण त्वरण है)



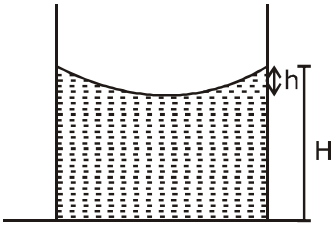
(A) $R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$

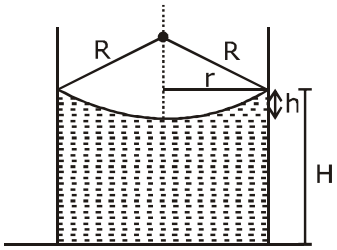
(B) $R = \frac{3r^2}{2h}$

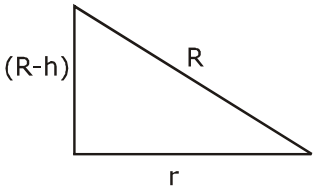
(C) Apparent depth of the bottom of the beaker is close to $\frac{3H}{2}\left(1 + \frac{\omega^2 H}{2g}\right)^{-1}$

(D) Apparent depth of the bottom of the beaker is close to $\frac{3H}{4}\left(1 + \frac{\omega^2 H}{4g}\right)^{-1}$

Sol. **A,D**





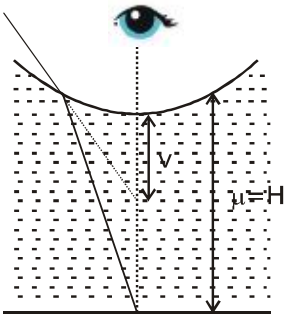


$R^2 = (R - h)^2 + r^2$

$R^2 = R^2 + h^2 - 2Rh + r^2$

$2Rh = h^2 + r^2$

$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$



$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{R}$$

$$\frac{1}{v} - \frac{4}{3(-H+h)} = \frac{1-\frac{4}{3}}{R}$$

$$\frac{1}{v} + \frac{4}{3(H-h)} = \frac{-1}{3R}$$

$h << r$

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h} \qquad (h^2 = 0)$$

$$R = \frac{r^2}{2h}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{4}{3(H-h)} - \frac{2h}{3r^2}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{2h}{3r^2} - \frac{4}{3(H-h)}$$

$h <<< H$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{3H}{4} \times \frac{2}{3}\frac{h}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{Hh}{2r^2}\right)$$

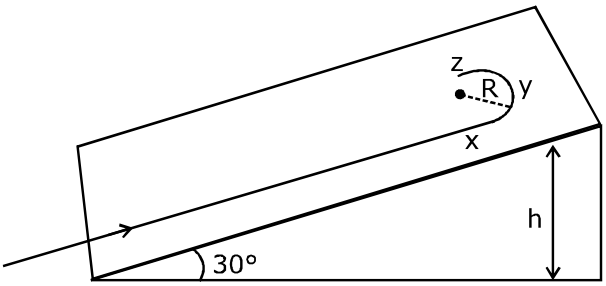
$$gh = \frac{\omega^2 r^2}{2} \Rightarrow \frac{r^2}{h} = \frac{2g}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1 + \frac{H}{2}\frac{\omega^2}{2g}\right)$$

$$\frac{1}{v} = -\frac{4}{3H}\left(1+\frac{H\omega^2}{4g}\right)$$

$$|v| = \frac{3H}{4}\left(1+\frac{H\omega^2}{4g}\right)^{-1}$$

8. A student skates up a ramp that makes an angle 30° with the horizontal. He/she starts (as shown in the figure) at the bottom of the ramp with speed v_0 and wants to turn around over a semicircular path xyz of radius R during which he/she reaches a maximum height h (at point y) from the ground as shown in the figure. Assume that the energy loss is negligible and the force required for this turn at the highest point is provided by his/her weight only. Then (g is the acceleration due to gravity)
एक विद्यार्थी एक रेम्प के ऊपर फिसलता (skates) है, जो क्षैतिज से 30° को कोण बनाता है। वह चित्रानुसार v_0 चाल से रेम्प की तली पर प्रारंभ होता है तथा R त्रिज्या के एक अर्धवत्तीय पथ xyz पर मुड़ना (turn around) चाहता है, जिसके दौरान वह चित्रानुसार धरातल से अधिकतम ऊँचाई h (बिन्दु y पर) पहुँचता है। माना कि ऊर्जा हानि नगण्य है तथा उच्चतम बिन्दु पर इस घुमाव के लिए आवश्यक बल केवल उसके भार द्वारा प्रदान किया जाता है। तब (g गुरूत्वीय त्वरण हैं)



(A) $v_0^2 - 2gh = \frac{1}{2}gR$

(B) $v_0^2 - 2gh = \frac{\sqrt{3}}{2}gR$

(C) the centripetal force required at points x and z is zero
(D) the centripetal force required is maximum at points x and z

(A) $v_0^2 - 2gh = \frac{1}{2}gR$

(B) $v_0^2 - 2gh = \frac{\sqrt{3}}{2}gR$

(C) x तथा z बिन्दुओं पर आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल शून्य है
(D) x तथा z बिन्दुओं पर आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल अधिकतम है

Sol. **A,D**

Given : The force required for turn over a semi circular path at the highest point is provided by his/ her weight only so at that balancing situation

$$mg \sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg \times \sin 30° = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{gR}{2} = v^2 \qquad ....(i)$$

From energy conservation

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2} mv^2$$

$$v_0^2 - 2gh = v^2$$

$$v_0^2 - 2gh = \frac{gR}{2}$$

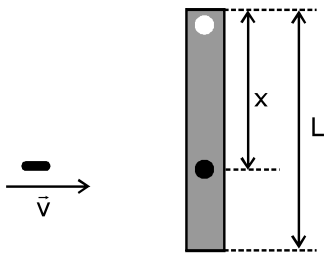
Option A correct

(D)

As gravitation force is not providing centripetal force at x and z that's why maximum force is applied on x and z for circular motion.

9. A rod of mass m and length L, pivoted at one of its ends, is hanging vertically. A bullet of the same mass moving at speed v strikes the rod horizontally at a distance x from its pivoted end and gets embedded in it. The combined system now rotates with angular speed ω about the pivot. The maximum angular speed ω_M is achieved for $x = x_M$. Then

m द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक छड़ इसके एक सिरे पर कीलकीत है, जो ऊर्ध्वाधर रूप से लटक रही हैं। v चाल से गतिमान समान द्रव्यमान की एक गोली इसके कीलकीत सिरे से x दूरी पर क्षैतिज रूप से छड़ से टकराती है तथा इसमें बैठ (embedded) जाती है। संयुक्त निकाय अब कीलक के परितः ω कोणीय चाल से घूमता है। अधिकतम कोणीय चाल ω_M, $x = x_M$ के लिए प्राप्त की जाती है। तब–'



(A) $\omega = \frac{3vx}{L^2 + 3x^2}$ (B) $\omega = \frac{12vx}{L^2 + 12x^2}$ (C) $x_M = \frac{L}{\sqrt{3}}$ (D) $\omega_M = \frac{v}{2L}\sqrt{3}$

Sol. **A,C,D**

From angular momentum conservation

$L_i = L_F$

$$\Rightarrow mvx = \left(\frac{mL^2}{3} + mx^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{mvx}{\left(\frac{mL^2}{3} + Mx^2\right)}$$

$\therefore$ m = mass of bullet and rod is same

$$\omega = \frac{vx}{\frac{L^2}{3} + x^2}$$

$$\omega = \frac{3vx}{L^2 + 3x^2} \qquad ...(i)$$

option (A) is correct

Now for maximum value of ω

$$\frac{d\omega}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{3vx}{L^2 + 3x^2}\right) = 0 \Rightarrow 3v\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{L^2 + 3x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{L^2}{x} + \frac{3x^2}{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{L^2}{x} + 3x\right)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)\left(\frac{L^2}{x} + 3x\right)^{-2}\left(-\frac{L^2}{x^2} + 3\right) = 0$$

$$\frac{-L^2}{x^2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{L^2}{3}$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Option (C) is correct

Now put this value in equation (i)

$$\omega_{max} = \frac{3v\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)}{L^2 + 3(L^2/3)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}v}{2L}$$

Option (D) is correct

10. In an X-ray tube, electrons emitted from a filament (cathode) carrying current I hit a target (anode) at a distance d from the cathode. The target is kept at a potential V higher than the cathode resulting in emission of continuous and characteristic X-rays. If the filament current I is decreased to $\frac{I}{2}$, the potential difference V is increased to 2V, and the separation distance d is reduced to $\frac{d}{2}$, then

(A) the cut-off wavelength will reduce to half, and the wavelengths of the characteristic X-rays will remain the same

(B) the cut-off wavelength as well as the wavelengths of the characteristic X-rays will remain the same

(C) the cut-off wavelength will reduce to half, and the intensities of all the X-rays will decrease

(D) the cut-off wavelength will become two times larger, and the intensity of all the X-rays will decrease

एक X-किरण नली में, I धारावाही एक तन्तु (कैथोड़) से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन, कैथोड़ से d दूरी पर एक लक्ष्य (एनॉड़) से टकराते है। लक्ष्य कैथोड़ की तुलना मे उच्च विभव V पर रखा जाता है जिसके परिणामस्वरूप सतत् और अभिलाक्षणिक X-किरणों का उत्सर्जन होता है। यदि तन्तु धारा I से $\frac{I}{2}$ तक घटाई जाती है, विभवान्तर V से 2V तक बढ़ाया जाता है तथा पथक्करण दूरी d से $\frac{d}{2}$ तक घटाई जाती है तब–

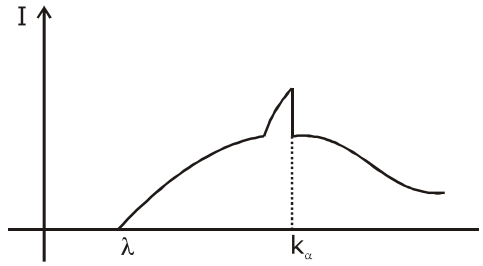
(A) अंतक तरंगदैर्ध्य घटकर आधी हो जाएगी तथा अभिलाक्षणिक X-किरणों की तरंगदैर्ध्य समान रहेगी

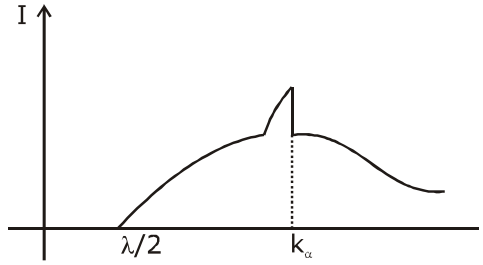
(B) अंतक (cut-off) तरंगदैर्ध्य तथा अभिलाक्षणिक X-किरण की तरंगदैर्ध्य समान रहेगी

(C) अंतक तरंगदैर्ध्य घटकर आधी हो जाएगी तथा सभी X-किरणों की तीव्रतायें घटेगी

(D) अंतक तरंगदैर्ध्य दो गुना बड़ी (larger) हो जायेगी तथा सभी X-किरणों की तीव्रता घटेगी

Sol. A,C





$ev = \frac{hc}{\lambda}$

$v \propto \frac{1}{\lambda}$

$\lambda \propto \frac{1}{v}$

$v \rightarrow 2v$

$\lambda \rightarrow \lambda/2$

If current in filament is reduced then emitting electrons should be reduced thats why intensity of x-ray is reduced.

11. Two identical non-conducting solid spheres of same mass and charge are suspended in air from a common point by two non-conducting, massless strings of same length. At equilibrium, the angle between the strings is α. The spheres are now immersed in a dielectric liquid of density 800 kg m^{-3} and dielectric constant 21. If the angle between the strings remains the same after the immersion, then

(A) electric force between the spheres remains unchanged

(B) electric force between the spheres reduces

(C) mass density of the spheres is 840 kg m^{-3}

(D) the tension in the strings holding the spheres remains unchanged

समान द्रव्यमान और आवेश के दो एकसमान अचालकीय ठोस गोले, समान लम्बाई की दो अचालकीय द्रव्यमानरहीत रस्सियों द्वारा एक उभयनिष्ठ बिन्दु से हवा में लटकाये जाते है। साम्यावस्था पर, रस्सियों के बीच कोण α है। अब गोले परावैद्युतांक 21 तथा घनत्व 800 kg m^{-3} के एक परावैद्युत द्रव में डुबोये जाते हैं। यदि डुबने के पश्चात रस्सियों के बीच कोण समान रहता है, तब–

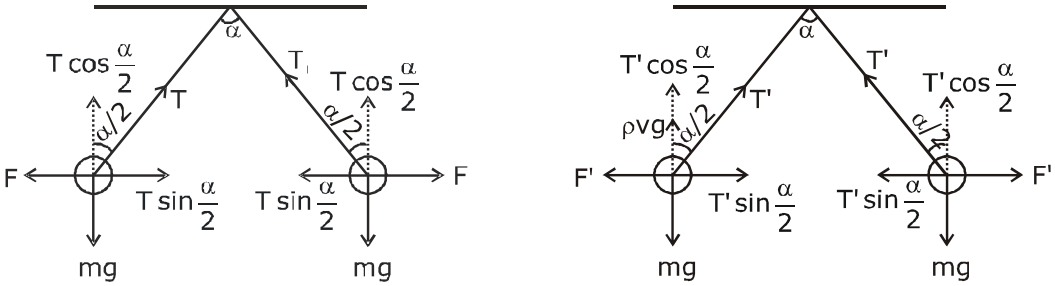
(A) गोलों के बीच वैद्युत बल अपरिवर्तित रहता है।

(B) गोलों के बीच वैद्युत बल घटता है।

(C) गोलों का द्रव्यमान घनत्व 840 kg m^{-3} है।

(D) गोलों को धारण करने (holding) वाली रस्सियों में तनाव अपरिवर्तित रहता है।

Sol. **(Official Answer) B,C**



$$T \sin \frac{\alpha}{2} = F$$

$$T' \sin \frac{\alpha}{2} = F'$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{F}{F'}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 21}\frac{q^2}{r^2}}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{21}{1}$$

$$T' = \frac{T}{21}$$

$T \cos \frac{\alpha}{2} = mg$

$T' \cos \frac{\alpha}{2} = mg - \rho vg$

$$\frac{T' \cos \frac{\alpha}{2}}{T' \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{mg - \rho vg}{mg}$$

$$\frac{1}{21} = 1 - \frac{\rho vg}{dvg}$$

$$\frac{\rho}{d} = 1 - \frac{1}{21}$$

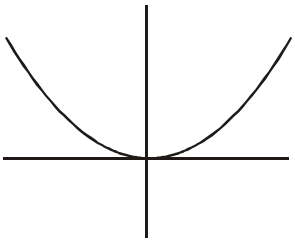
$$\frac{\rho}{d} = \frac{20}{21}$$

$$d = \frac{21}{10} \times 800$$

$d = 840 \text{ kg/m}^3$

12. Starting at time t = 0 from the origin with speed 1 ms^{-1}, a particle follows a two-dimensional trajectory in the x-y plane so that its coordinates are related by the equation $y = \frac{x^2}{2}$. The x and y components of its acceleration are denoted by a_x and a_y, respectively. Then
(A) $a_x = 1\ ms^{-2}$ implies that when the particle is at the origin, $a_y = 1\ ms^{-2}$
(B) $a_x = 0$ implies $a_y = 1\ ms^{-2}$ at all times
(C) at t = 0, the particle's velocity points in the x-direction
(D) $a_x = 0$ implies that at t = 1 s, the angle between the particle's velocity and the x axis is 45°
समय t = 0 पर 1 ms^{-1} चाल से मूल बिन्दु से प्रारंभ एक कण x-y तल में एक द्वि–विमीय प्रक्षेप पथ का अनुसरण करता है ताकि इसके निर्देशांक समीकरण $y = \frac{x^2}{2}$ द्वारा सम्बन्धित है। इसके त्वरण के x तथा y घटक क्रमशः a_x व a_y द्वारा निरूपित है। तब–
(A) $a_x = 1\ ms^{-2}$ बताता है कि जब कण मूल बिन्दु पर है, तब $a_y = 1\ ms^{-2}$
(B) $a_x = 0$ बताता है कि पूरे समय $a_y = 1\ ms^{-2}$ है।
(C) t = 0 पर, कण का वेग x-दिशा मे निर्देशित है।
(D) $a_x = 0$ बताता है कि t = 1 s पर, कण के वेग तथा x अक्ष के बीच कोण 45° है।

Sol. A,B,C,D or B,C,D



t = 0, x = 0, u = 1m/sec

$y = \frac{x^2}{2}$

$v_y = \frac{2x}{2} v_x$

$v_y = xv_x$

$a_y = xa_x + v_x^2$

option A

$\frac{dy}{dx} = x \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1$

$R_c = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{1}$

at x = 0 $R_c = 1$

$\therefore a_y = \frac{v^2}{R_c} = \frac{1^2}{1} = 1 \text{ m/s}^2$

at x = 0

$a_y = 1 \text{ m/s}^2$

independent of a_x

option (B)

if $a_x = 0$

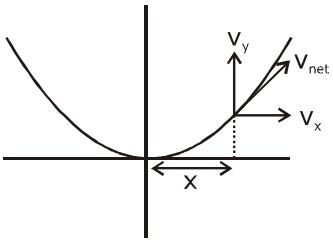
$a_y = 0 + v_x^2 = 1 \text{ m/sec}^2$

option (C)

$v_y = xv_x$ at = x = 0 at t = 0

$v_y = 0 \quad v_x = 1$ m/sec

Option (d)



$x = 1m$

$\frac{v_y}{v_x} = \tan\theta = x = 1$

$\theta = 45°$

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If ONLY the correct numerical value is entered;
Zero Marks	: 0	In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

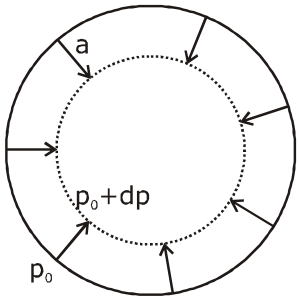
पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
शून्य अंक	: 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13. A spherical bubble inside water has radius R. Take the pressure inside the bubble and the water pressure to be p_0. The bubble now gets compressed radially in an adiabatic manner so that its radius becomes (R – a). For $a \ll R$ the magnitude of the work done in the process is given by $(4\pi p_0 R a^2)X$, where X is a constant and $\gamma = C_p/C_v = \frac{41}{30}$. The value of X is_____.

पानी के अन्दर एक गोलीय बुलबुले की त्रिज्या R है। बुलबुले के अन्दर दाब तथा पानी का दाब p_0 लेते है। अब बुलबुले को एक रूद्धोष्म ढंग में त्रिज्य रूप से संपीडीत किया जाता है ताकि इसकी त्रिज्या (R – a) हो जाती हैं। $a \ll R$ के लिए, प्रक्रम में किये गये कार्य का परिमाण $(4\pi p_0 R a^2)X$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ X एक नियतांक है तथा $\gamma = C_p/C_v = \frac{41}{30}$ है। X का मान है–

Sol. 2.05



$dv = 4\pi R^2 a$

pv^{γ} = constant

$v^{\gamma}dp + p\gamma v^{\gamma-1}\, dv = 0$

$$\Rightarrow dp = -\gamma p\, \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{-\gamma p_0 4\pi R^2 a}{v}$$

Work done, $W = \Delta p_{avg.} \times dv$

$$= \left|\frac{dp}{2}\right| 4\pi R^2 a$$ (as for small changes $\Delta p_{avg} = \frac{dp}{2}$ by considering linear variation in pressure)

$$= \frac{\gamma p_0 4\pi R^2 a \times 4\pi R^2 a}{2v}$$

$$= \frac{\gamma p_0 4\pi R^2 a \times 4\pi R^2 a}{2 \times \frac{4}{3}\pi R^3}$$

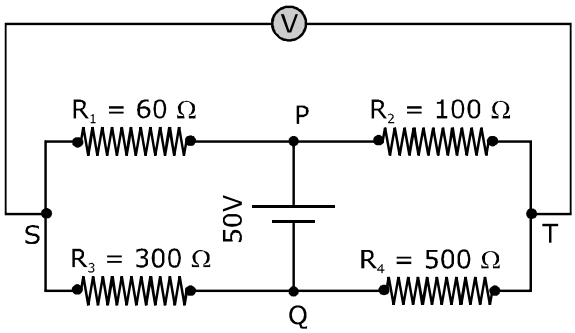
$$= \frac{3\gamma p_0 4\pi R a^2}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{41}{30} \times 4\pi p_0 R a^2$$

$= 2.05\ (4\pi p_0 R a^2)$ $\quad \therefore x = 2.05$ Ans.

14. In the balanced condition, the values of the resistances of the four arms of a Wheatstone bridge are shown in the figure below. The resistance R_3 has temperature coefficient 0.0004 °C^{-1}. If the temperature of R_3 is increased by 100 °C, the voltage developed between S and T will be _____ volt.

सन्तुलन स्थिति में, एक व्हीटस्टोन सेतु की चार भुजाओं के प्रतिरोधों के मान चित्रानुसार है। प्रतिरोध R_3 का तापमान गुणांक 0.0004 °C^{-1} है। यदि R_3 का तापमान 100 °C से बढ़ाया जाता है, तब S व T के बीच उत्पन्न वोल्टता वोल्ट में होगी–

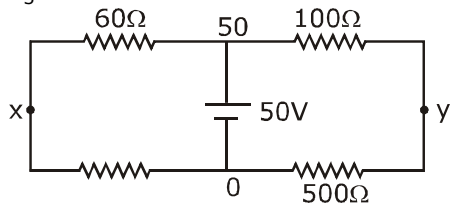


Sol. **0.27**

$R_3 = 300\ (1 + \alpha\Delta T)$

$R_3 = 300\ (1 + 0.0004 \times 100)$

$R_3 = 312\ \Omega$



$\frac{x-0}{312} + \frac{x-50}{60} = 0$

$\frac{x}{52} + \frac{x}{10} = 5$

$62x = 520 + 5$

$x = \frac{520+5}{62}$

$\frac{y-50}{100} + \frac{y-0}{500} = 0$

$y - 50 + \frac{4}{5} = 0$

$\frac{6y}{5} = 50$

$y = \frac{250}{6}$

$x = \frac{2600}{62} = 41.93 \quad y = 41.66$

$x = 41.93 - 41.66 = 0.27$

15. Two capacitors with capacitance values $C_1 = 2000 \pm 10$ pF and $C_2 = 3000 \pm 15$ pF are connected in series. The voltage applied across this combination is $V = 5.00 \pm 0.02$ V. The percentage error in the calculation of the energy stored in this combination of capacitors is _____.

$C_1 = 2000 \pm 10$ pF तथा $C_2 = 3000 \pm 15$ pF धारिता के दो संधारित्र श्रेणी में जोड़े जाते है। इस संयोजन के सिरों पर आरोपित वोल्टता $V = 5.00 \pm 0.02$ V है। संधारित्रों के इस संयोजन में संचित ऊर्जा की गणना में प्रतिशत त्रुटि हैं–

Sol. 1.30

$$E_T = \frac{1}{2} C_{net} v^2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000}$$

$$\frac{dC}{C^2} = \frac{dC_1}{C_1^2} + \frac{dC_2}{C_2^2} \qquad \frac{1}{C} = \frac{3+2}{6000} = \frac{5}{6000}$$

$$C = \frac{6000}{5} = 1200$$

$$\left(\frac{dC}{C}\right) = \left(\frac{dC_1}{C_1^2} + \frac{dC_2}{C_2^2}\right) C$$

$$\frac{dC}{C} = \left[\frac{10}{(2000)^2} + \frac{15}{(3000)^2}\right] 1200$$

$$\frac{dC}{C} = \left(\frac{10}{4} + \frac{15}{9}\right)\left(\frac{1200}{10^6}\right)$$

$$\frac{dC}{C} = (2.5 + 1.67)\left(\frac{1200}{10^4}\right)$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{4.17 \times 12}{10^4}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{dC}{C} + \frac{2\Delta V}{V} = \left(\frac{4.17 \times 12}{10^4} + \frac{2 \times 0.02}{5 \times 100}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{50.64}{10^4} + \frac{4}{5 \times 100}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = (0.504 + 0.8) = 1.30$$

16. A cubical solid aluminium (bulk modulus = $-V\frac{dP}{dV}$ = 70 GPa) block has an edge length of 1 m on the surface of the earth. It is kept on the floor of a 5 km deep ocean. Taking the average density of water and the acceleration due to gravity to be 10^3 kg m^{-3} and 10 ms^{-2}, respectively, the change in the edge length of the block in mm is _____.

एक घनीय ठोस एल्युमिनियम (बल्क मापांक = $-V\frac{dp}{dv}$ = 70 GPa) ब्लॉक की 1 m लम्बाई की एक भुजा (edge) पथ्वी की सतह पर है। यह एक 5 km गहरे समुद्र के फर्श पर रखा जाता है। पानी का घनत्व तथा गुरूत्वीय त्वरण क्रमशः 10^3 kg m^{-3} व 10 ms^{-2} लेते है। तब ब्लॉक की भुजा की लम्बाई में mm में परिवर्तन है–

Sol. **0.23 to 0.24**

$$B = V\frac{dP}{dV}$$

$$70 \times 10^9 = \frac{V}{dV} \times 10^3 \times 10 \times 5 \times 10^3$$

$$7 \times 10^9 = \frac{V}{dV} \times 10^6 \times 5$$

$$7000 = \frac{V}{dV} \times 5$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{5}{7000}$$

$$V = l^3$$

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{l}$$

$$\frac{3dl}{l} = \frac{5}{7000}$$

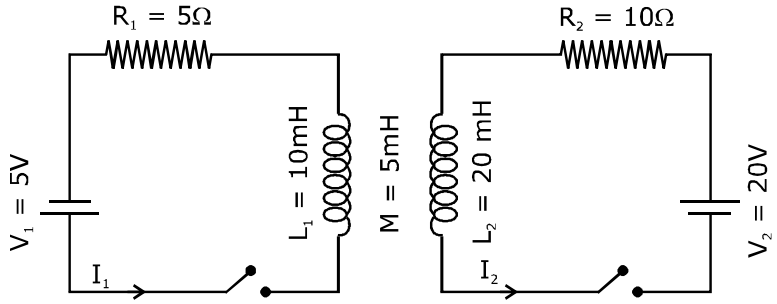
$$\frac{dl}{l} = \frac{5}{21000}$$

$$\frac{dl}{l} = \left(\frac{5}{21}\right) mm$$

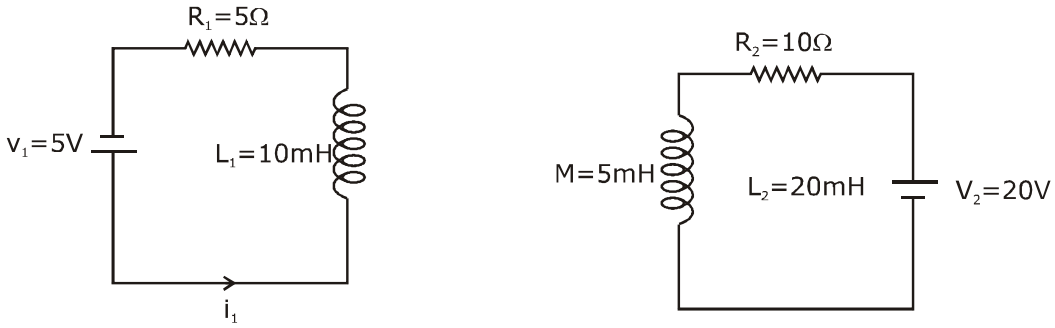
$$dl = 0.238\, mm$$

17. The inductors of two LR circuits are placed next to each other, as shown in the figure. The values of the self-inductance of the inductors, resistances, mutual-inductance and applied voltages are specified in the given circuit. After both the switches are closed simultaneously, then total work done by the batteries against the induced EMF in the inductors by the time the currents reach their steady state values is_____ mJ.

दो LR परिपथों के प्रेरक चित्रानुसार एक दूसरे के बगल में रखे गये है। प्रेरकों के स्वप्रेरकत्व, प्रतिरोध, अन्योन्य प्रेरकत्व तथा आरोपित वोल्टता दिये गये परिपथ में उल्लेखित है। दोनों स्विच एक साथ बन्द होने के पश्चात्, जब तक धारायें उनके स्थिर अवस्था मानों तक पहुँचती है, तब तक प्रेरकों में प्रेरित वि. वा. बल के विरूद्ध बैट्रीयों द्वारा कुल किया गया कार्य _____ mJ है।



Sol. 55



$$\varepsilon_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{Mdi_2}{dt}$$

$$dW = \varepsilon_1 i_1 dt$$

$$dW_1 = L_1 (di_1)\, i_1 + M(di_2)\, i_1$$

$$dW_2 = L_2 (di_2)\, i_2 + M(di_1)\, i_2$$

$$\int_0^W (dW_1 + dW_2) = \int_0^{i_1} L_1(di_1)i_1 + \int_0^{i_2} L_2(di_2)i_2 + M\int_0^{i_1 i_2} d(i_1 i_2)$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M(i_1 i_2)$$

$$W = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 4 + 5 \times 10^{-3} \times 2$$

$$W = 55 \times 10^{-3} = 55 \text{ mJ}$$

18. A container with 1 kg of water in it is kept in sunlight, which causes the water to get warmer than the surroundings. The average energy per unit time per unit area received due to the sunlight is 700 Wm^{-2} and it is absorbed by the water over an effective area of 0.05 m^2. Assuming that the heat loss from the water to the surroundings is governed by Newton's law of cooling, the difference (in °C) in the temperature of water and the surroundings after a long time will be _____. (Ignore effect of the container, and take constant for Newton's law of cooling = 0.001 s^{-1}, Heat capacity of water = 4200 J kg^{-1} K^{-1}).

1 kg पानी के साथ एक पात्र सूर्य के प्रकाश में रखा है, जिसके कारण पानी परिवेश से अधिक गर्म हो जाता है। सूर्य प्रकाश के कारण प्राप्त प्रति इकाई समय प्रति इकाई क्षेत्रफल औसत ऊर्जा 700 Wm^{-2} है तथा यह 0.05 m^2 के प्रभावी क्षेत्रफल पर पानी द्वारा अवशोषित की जाती है। माना कि पानी से परिवेश में उष्मा हानि न्यूटन के शीतलन के नियम द्वारा नियंत्रित (governed) है, तब एक लम्बे समय पश्चात् पानी तथा परिवेश के तापमान में अन्तर (°C में) होगा (पात्र के प्रभाव को नगण्य लेते है, तथा न्यूटन के शीतलन के नियम के लिए नियतांक = 0.001 s^{-1}, पानी की उष्मीय धारिता = 4200 J kg^{-1} K^{-1} है) :

Sol. **8.33**

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) = \left(\frac{eA\sigma 4T_0^3}{ms}\right)(T - T_0)$$

$ms = 4200$

$$\frac{eA\sigma 4T_0^3}{ms} = 0.001$$

$eA\sigma 4T_0{}^3 = 0.001 \times 4200 = 4.2$

Given, $\frac{dQ}{dt \times \text{area}} = 700$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right) = 700 \times 0.05$$

$= 35$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right) = (eA\sigma 4T_0{}^3)\,(T - T_0)$$

$35 = 4.2\,\Delta T$

$$\Delta T = \frac{35 \times 10}{42} = \frac{50}{6} = 8.33$$

JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 2

SECTION–1 (Maximum marks :18)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each questionis a **SINGLE DIGIT INTEGER ranging from 0 TO 9, BOTH INCLUSIVE.**
- For Each Question, enter the correctinteger corresponging to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks : +3 If ONLY the correct integer is entered;
Zero Marks : 0 If the questio is unanswered.
Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.1 For a complex number z, let $\mathrm{Re}(z)$ denote the real part of z. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $z^4 - |z|^4 = 4iz^2$, where $i = \sqrt{-1}$. Then the minimum possible value of $|z_1 - z_2|^2$, where $z_1, z_2 \in S$ with $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ and $\mathrm{Re}(z_2) < 0$, is

Q.1 एक सम्मिश्र संख्या z के लिये माना $\mathrm{Re}(z)$, z के वास्तविक भाग को निरूपित करता है। माना $z^4 - |z|^4 = 4iz^2$, को सन्तुष्ट करने वाली सभी सम्मिश्र संख्याओ z का समुच्य S है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है। तब $|z_1 - z_2|^2$ का न्यूनतम सम्भावित मान होगा। जहाँ $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ तथा $\mathrm{Re}(z_2) < 0$, के साथ $z_1, z_2 \in S$ है –

Ans. 8

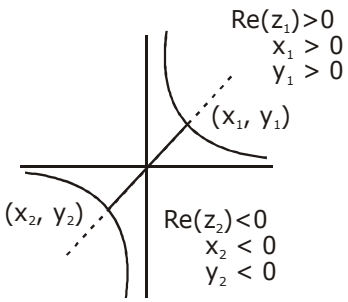
$z^4 - |z|^4 = 4iz^2$

$z^4 - |\bar{z}|^2|z|^2 = 4i\ z^2$

$z^2 (z^2 - (\bar{z})^2) = 4iz^2$

$z^2 = 0 \mid z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$

Let $z = x + iy$



$z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$
$(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i$
$xy = 1$
Now $(z_1 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1 y_2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1 (-x_2) + 2y_1(-y_2)$
Now AM $\geq$ GM
$\geq 8(x_1^2 x_2^2 y_1^2 y_2^2 x_1 x_2 y_1 y_2)^{1/8}$
≥ 8

Q.2 The probability that a missile hits a target successfully is 0.75 . In order to destroy the target completely, at least three successful hits are required. Then the minimum number of missiles that have to be fired so that the probability of completely destroying the target is NOT less than 0.95, is

Q.2 एक मिसाइल द्वारा सफलता पूर्वक लक्ष्म पर मारने की प्रायिकता 0.75 है। लक्ष्य को पूरी तरह नष्ट करने के लिए कम से कम तीन सफल मार की आवश्यकता है, तब मिसाइलों की न्यूनतम संख्या, जिनको दागा जाता है। ताकि लक्ष्य को सम्पूर्ण नष्ट करने की प्रायिकता 0.95 से कम न हो, होगी।

Ans. 6

P(Hit) = 0.75 = 3/4 & P(Hitnot) = 0.25 = 1/4
P(targel Hit) $\geq$ 0.95
1 - P (tagent not hit in n throws) $\geq$ 0.95

$$1 - {}^nC_0 \left(\bar{H}\right)^n - {}^n C_1 \left(\bar{H}\right)^{n-1} .(H) - {}^n C_2 \left(\bar{H}\right)^{n-2} (H)^2 \geq 0.95$$

$$1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n - n.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} .\frac{3}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0.95$$

$$1 - 0.95 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{9n^2 - 3n + 2}{2}\right]$$

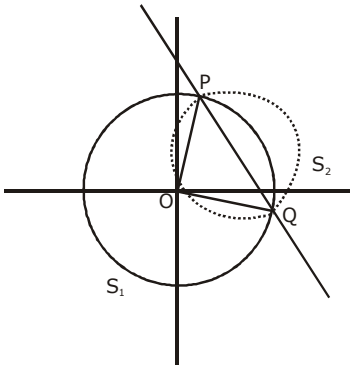
$$\left[9n^2 - 3n + 2\right] \leq \frac{4^n}{10}$$

Now check n = 6

Q.3 Let O be the centre of the circle $x^2 + y^2 = r^2$, where $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Suppose PQ is a chord of this circle and the equation of the line passing through P and Q is $2x + 4y = 5$. If the centre of the circumcircle of the triangle OPQ lies on the line $x + 2y = 4$, then the value of r is

Q.3 माना O वत्त $x^2 + y^2 = r^2$, का केन्द्र है जहाँ $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$ है। माना PQ इस वत्त की एक जीवा है तथा P एवं Q से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $2x + 4y = 5$ है। यदि त्रिभुज OPQ के परिवत्त का केन्द्र रेखा $x + 2y = 4$, पर स्थित है, तब r का मान होगा।

Ans. 2



$S_1 : x^2 + y^2 = r^2$ whre $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$

now let $S_2 : x^2 + y^2 + ax + by = 0 \Rightarrow C_2; \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$

RA of $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ is PQ
PQ : RA : $S_1 - S_2 = 0$
PQ : $ax + by + r^2 = 0$
Given PQ : $2x + 4y - 5 = 0$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{r^2}{-5} \quad .....(1)$$

also centre of S_2 lies on $x + 2y = 4$

$$\Rightarrow \frac{-a}{2} - b = 4 \quad ....(2)$$

from (1) & (2)

$$\frac{-r^2}{-5} - \frac{4r^2}{-5} = 4$$

$- 5r^2 = -2o$
$r^2 = 4$
$r = 2$

Q.4 The trace of a square matrix is defined to be the sum of its diagonal entries. If A is a 2×2 matrix such that the trace of A is 3 and the trace of A^3 is -18 , then the value of the determinant of A is

Q.4 एक वर्ग आवयुह का अनुरेखण, इसके विकर्ण के अवयवो के योगफल को परिभाषित करता है। यदि A एक 2×2 का आव्युह इस प्रकार है कि A का अनुरेखण 3 है तथा A^3 का अनुरेखण –18 है, तब A के सारणिक का मान होगा –

Ans. 5

Let $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow T_r(A)=3$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}a^2+bc & 3b\\ 3c & cb+(3-a)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$T_r(A^3) = a^3 + abc + 3bc + 3bc + 3bc +(3-a)^2 3 - abc - a(3-a)^2$
$-18 = a^3 + 9bc + (3-a)^3$
$\Rightarrow a^3 + 9bc + 27 - a^3 - 3.3a (3 - a)= - 18$
$\Rightarrow a^2 - 3a + bc = -5$
Now $|A| = a(3 - a) - bc$
$= 3a - a^2 - bc$
$|A| = 5$

Q.5 Let the functions $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ and $g:(-1,1)\to(-1,1)$ be defined by

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ and $g(x)=x-[x]$

where [x] denotes the greatest integer less than or equal to x. Let $fog:(-1,1)\to\mathbb{R}$ be the composite function defined by (fog)(x) = f(g(x)). Suppose c is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT continuous, and suppose d is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT differentiable. Then the value of $c+d$ is

Q.5 माना फलन $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ तथा $g:(-1,1)\to(-1,1)$,

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ तथा $g(x)=x-[x]$ के द्वारा परिभाषित है, जहाँ [x], x से छोटे या बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है। माना $fog:(-1,1)\to\mathbb{R}$ एक संयुक्त फलन है जो (fog)(x) = f(g(x)) के द्वारा परिभाषित है। माना c अंतराल (–1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर Fog संतत नही है तथा माना d अंतराल (–1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर fog अवकलनीय नही है, तब $c+d$ का मान होगा।

Ans. 4

f(x) = |2x - 1| + |2x +1|

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -4x & x \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

g(x) = x - [x] = {x}

$$\text{Now fog} = \begin{cases} 4g(x) & g(x) \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < g(x) < \frac{1}{2} \\ -4g(x) & g(x) \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4\{x\} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 4\{x\} & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4x & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x+1) & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Now check
fog is not continuous at x = 0 only.

fog is not differentiable at x = $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

c = 1 & d = 3
c + d = 4

Q.6 The value of the limit

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x+\sin x)}{\left(2\sin 2x\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2x+\cos\frac{3x}{2}\right)} \text{ is}$$

Q.6 सीमा $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x+\sin x)}{\left(2\sin 2x\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos 2x+\cos\frac{3x}{2}\right)}$ का मान है –

Ans. 8

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\left(\sin 3x+\sin x\right)}{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{5x}{2}-\sqrt{2}.2\cos^2 x-\cos\frac{3x}{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\sin 2x\cos x}{2\sin x\sin\frac{x}{2}+2\sin 3x.\sin\frac{x}{2}-2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x\cos^2 x}{2\sin\frac{x}{2}\{2\sin 2x.\cos x\}-2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x}{2.4\sin\frac{x}{2}\sin x-2\sqrt{2}}$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{8.\frac{1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{32}{8-4}=\frac{32}{4}=8$$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.7 Let b be a nonzero real number. Suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a differentiable function such that $f(0)=1$

If the derivative f' of f satisfies the equation

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ for all $x\in\mathbb{R}$, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) If $b>0$, then f is an increasing function

(B) If $b<0$, then f is a decreasing function

(C) $f(x)f(-x)=1$ for all $x\in\mathbb{R}$

(D) $f(x)-f(-x)=0$ for all $x\in\mathbb{R}$

Q.7 माना b एक अशून्य वास्तविक संख्या है। माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(0)=1$ है। यदि f का अवकलज f' जो सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए समीकरण

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ को सन्तुष्ट करता है, तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा सत्य है।

(A) यदि $b>0$ है, तब f एक वर्धमान फलन है।

(B) यदि $b<0$ है, तब f एक हासमान फलन है।

(C) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)f(-x)=1$ है।

(D) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)-f(-x)=0$ है।

Ans. A,C

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{b^2+x^2}dx$$

$$\ln(f(x))=\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+c$$

put $x=0\Rightarrow c=0$

(A) $f(x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

$f(x)>0\ \forall\ x\in R\ \ \because\ f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}>0\Rightarrow f(x)\uparrow$

(C) $f(x)\,f(-x)=e^{\left(\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}=e^0=1$

(D) $f(x)-f(-x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}-e^{-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

for all $x\in R\neq 0$

Q.8 Let a and b be positive real numbers such that $a>1$ and $b<a.$ Let P be a point in the first quadrant that lies on the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ Suppose the tangent to the hyperbola at P passes through the point $(1,0),$ and suppose the normal to the hyperbola at P cuts off equal intercepts on the coordinate axes. Let Δ denote the area of the triangle formed by the tangent at P, the normal at P and the x -axis. If e denotes the eccentricity of the hyperbola, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $1<e<\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<e<2$ (C) $\Delta=a^4$ (D) $\Delta=b^4$

Q.8 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए इस प्रकार है कि $a>1$ तथा $b<a.$ है। माना P प्रथम चतुर्थांश में एक बिन्दु है जो अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ पर स्थित है। माना P पर अतिपरवलय की स्पर्शरेखा बिन्दु $(1,0),$ से गुजरती है तथा माना P पर अतिपरवलय का अभिलम्ब निर्देशी अक्षो पर समान अंतखण्ड काटती है। माना Δ, P पर स्पर्शरेखा, P पर अभिलंब तथा x-अक्ष द्वारा बने त्रिभुज के क्षेत्रफल को निरूपित करता है। यदि e अतिपरवलय की उत्केन्द्रता को व्यक्त करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है –

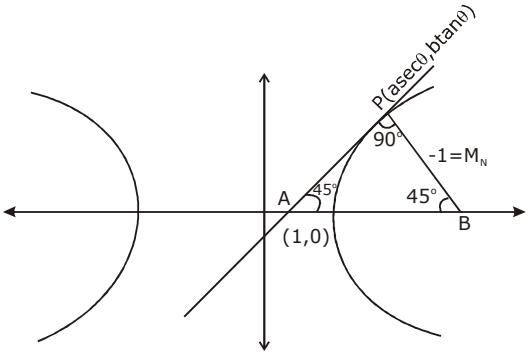
(A) $1<e<\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<e<2$ (C) $\Delta=a^4$ (D) $\Delta=b^4$

Ans. A,D

$\because$ normal cuts euqal Intercepts

$\therefore$ $M_N = -1$

$M_T = 1$



T at P $\Rightarrow \frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$

pass (1, 0)

$\sec\theta = a$

$\because$ $M_T = 1 \Rightarrow +\left(\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}\right)=1 \Rightarrow b=\tan\theta$

$b^2 = a^2(e^2-1) \Rightarrow e^2 - 1 = \sin^2\theta \Rightarrow e^2 = 1+\sin^2\theta$ ($\because$ $0<\theta<\pi/2$)

$1 < e^2 < 2 \Rightarrow 1 < e < \sqrt{2}$

Area $\Delta = \frac{1}{2}(AP)(AP)$ $\because$ AP = BP

$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\sec^2\theta\right)^2+\left(\tan^2\theta\right)^2\right]=\tan^4\theta=b^4$

Q.9 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be functions satisfying

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ and $f(x)=xg(x)$

for all $x,y\in\mathbb{R}$. If $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ then which of the following statements is/are TRUE?

(A) f is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(B) If $g(0)=1,$ then g is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(C) The derivative $f'(1)$ is equal to 1

(D) The derivative $f'(0)$ is equal to 1

Q.9 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ तथा $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ फलन है। जो सभी $x,y\in\mathbb{R}.$ के लिए

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ तथा $f(x)=xg(x)$ को सन्तुष्ट करते है। यदि $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) f प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(B) यदि $g(0)=1,$ है, तब g प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(C) अवकलज $f'(1)$, 1 के बराबर है।

(D) अवकलज $f'(0)$, 1 के बराबर है।

Ans. **A,B,D**

f'(x + y).1 = f'(y) + f(x) f'(y)
put y = 0
f'(x) = f'(0) + f(x)f'(0)
xg'(x) + g(x) = f'(0) + f(x). f'(0)
xg'(x) + g(x) = 1 + f(x)
f'(x) = f(x) + 1
f(0) = f'(0) + 1
f(0) = 0
f(1) = f(1) + 1

$$\int \frac{f(x)}{f(x)+1}dx = \int dx$$

$\Rightarrow$ ln(f(x) + 1) = x + c
put x = 0
c = 0
$f(x) = e^x - 1$
f(1) = e - 1
f'(1) = f(1) + 1 = e - 1 + 1 = e

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

g(0) = 1
f'(x) = xg'(x) + g(x)
f'(0) = g(0) = 1

we have check differentiability at x = 0

$$g'(0^+) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$g'(0^-) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{-x}-1}{-x}-1}{-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

g(x) is aiarecate for dex

M-II

to find function

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+f(x)f(x)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = (f(x)+1)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$= (f(x)+1)\lim_{h\to 0}\frac{h\ g(h)}{h}$$

f'(x) = f(x) + 1

Q.10 Let $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ be real numbers such that $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ and $\alpha+\gamma=1.$ Suppose the point (3,2,-1) is the mirror image of the point (1,0,-1) with respect to the plane $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$. Then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $\alpha+\beta=2$ (B) $\delta-\gamma=3$ (C) $\delta+\beta=4$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

Q.10 माना $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ वास्तविक संख्याएं इस प्रकार है कि $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$ तथा $\alpha+\gamma=1.$ है। माना बिन्दु (3,2,-1) समतल $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ के सापेक्ष बिन्दू (1,0,-1) का दर्पण प्रतिबिम्ब है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha+\beta=2$ (B) $\delta-\gamma=3$ (C) $\delta+\beta=4$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

Ans. A,B,C

pp' is normal to given plane

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{0}=\lambda(\text{let})$$

$\alpha=\beta,\gamma = 0$

$\therefore\ \alpha+\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = 1 = \beta$

$\alpha+\beta=2$

Q pt is mid pt of pp' = (2, 1, -1)

lie on plane

$2\alpha+\beta-\gamma=\delta$

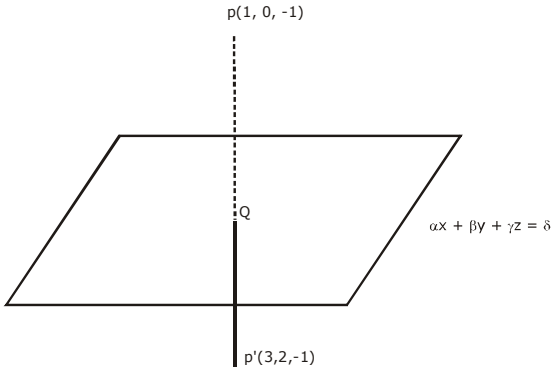
put α,β,γ

$\delta = 3$

$\delta-\gamma = 3$

$\delta+\beta = 4$

$\alpha+\beta+\gamma = 2\neq\delta$



Q.11 Let a and b be positive real numbers. Suppose $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ and $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ are adjacent sides of a parallelogram PQRS .Let $\vec{u}$ and $\vec{v}$ be the projection vectors of $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ along $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$, respectively. If $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ and if the area of the parallelogram PQRS is 8, then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) The length of the diagonal PR of the parallelogram PQRS is 4

(D) $\vec{w}$ is an angle bisector of the vectors $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$

Q.11 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ तथा $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ एक समान्तर चतुर्भुज PQRS की आसन्न भुजाएँ है। माना $\vec{u}$ तथा $\vec{v}$ क्रमशः $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$, के अनुदिश $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ का प्रक्षेप सदिश है । यदि $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ है तथा यदि समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल 8 है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ,

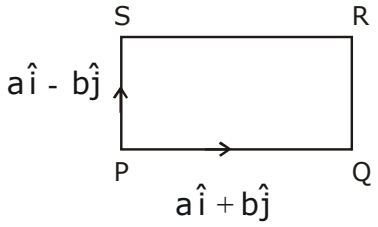
(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) समान्तर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR की लम्बाई 4 है।

(D) $\vec{w}$ सदिशो $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$ का एक कोण अर्द्धक है।

Ans. A,C



$$\vec{u} = \frac{\vec{w}.\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}$$

$$= \frac{\left(\hat{i}+\hat{j}\right).\left(a\hat{i}+b\hat{j}\right)}{\left|a\hat{i}+b\hat{j}\right|}$$

$$= \frac{(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{\left(\vec{w}\right).\overrightarrow{ps}}{\left|\overrightarrow{ps}\right|} = \frac{\left(\hat{i}+\hat{j}\right).\left(a\hat{i}-b\hat{j}\right)}{\left|a\hat{i}-b\hat{j}\right|} = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{w}|$

$$\frac{(a+b)|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 2a = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$2a^2 = 2b^2$

$a = b$

Area of parallelogram = $\begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 0 \\ a & -b & 0 \end{Vmatrix}$

$$\Rightarrow \left|-2ab\hat{k}\right| = 8$$

$ab = 4 \Rightarrow a^2 = 4$

$a = 2 = b$

$a + b = 4$

$a - b = 0$

Length of diagonal of parallelogram = $\left|\left(a\hat{i}+b\hat{j}\right)+\left(a\hat{i}-b\hat{j}\right)\right|$

= 2a = 4

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}=2a\hat{i},2b\hat{j}\neq\lambda\vec{w}$

Q.12 For nonnegative integers s and r, let

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases}$$

For positive integers m and n, let

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}}$$

where for any nonnegative integer p,

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

Then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ for all positive integers m, n

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) for all positive integers m, n

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) for all positive integers m, n

(D) g(2m, 2n)= $(g(m, n))^2$ for all positive integers m, n

Q.12 अऋणात्मक पूर्णांक s तथा r के लिए माना

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases}$$ है।

धनात्मक पूर्णांक m तथा n के लिए माना

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}}$$ है।

जहाँ किसी अऋणात्मक पूर्णांक p के लिए

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(D) g(2m, 2n)=$(g(m, n))^2$ सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

Ans. A,B,D

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot {}^{n+i}C_p \cdot {}^{n+p}C_{p-i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \frac{\lfloor n+i}{\lfloor p \lfloor n+i-p} \cdot \frac{\lfloor n+p}{\lfloor p-i \lfloor n+i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot \left(\frac{\lfloor n+p}{\lfloor p . \lfloor n}\right)\left(\frac{\lfloor n}{\lfloor n+i-p \lfloor p-i}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \left({}^{n}C_{p-i}\right)\left({}^{n+p}C_p\right)$$

$\Rightarrow {}^{n+p}C_p \, [{}^{m}C_0 \cdot {}^{n}C_p + {}^{m}C_1 {}^{n}C_{p-1} + ... + {}^{m}C_m {}^{n}C_{p-m}]$

coffi x^p in $(1 + x)^n (x+1)^m$

$f(m,n,p) = ({}^{n+p}C_p) ({}^{m+n}C_p)$

$$g(m,n) = \sum_{p=0}^{m+n} {}^{m+n}C_p = 2^{m+n}$$

g(m, n) = g(n,m)

$g(2m, 2n) = 2^{2(m+n)} = (2^{m+n})^2 = (g(m,n))^2$

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme:</u>

  Full Marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.13 An engineer is required to visit a factory for exactly four days during the first 15 days of every month and it is mandatory that no two visits take place on consecutive days. Then the number of all possible ways in which such visits to the factory can be made by the engineer during $1-15$ June 2021 is

Q.13 एक अभियता को प्रत्येक महिने के पहले 15 दिनो के दौरान ठीक चार दिनो के लिए एक कारखाने का दौरा करना आवश्यक है तथा यह अनिवार्य है कि लगातार दो दिन कोई यात्रा न हो, तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें कारखाने में इस तरह के दौरे अभियंता द्वारा $1-15$ जून 2021 के दौरान किये जा सकते है, होगी।

Ans. 495.00

To select = 4 days
not selected days = 11 days
gaps = 12

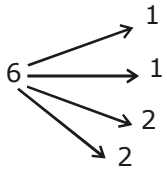
$$\therefore {}^{12}C_4 = \frac{12\times 11\times 5\times 9}{24} = 495$$

Q.14 In a hotel, four rooms are available. Six persons are to be accommodated in these four rooms in such a way that each of these rooms contains at least one person and at most two persons. Then the number of all possible ways in which this can be done is

Q.14 एक होटल में चार कमरे उपलब्ध है। इन चार कमरो में छः व्यक्तियो को इस प्रकार समायोजित करते है। इनमें से प्रत्येक कमरे में कम से कम एक व्यक्ति तथा अधिकतम दो व्यक्ति हो। तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें यह किया जा सकता है, होगी।

Ans. 1080.00

by grouping



$$\therefore \frac{6!}{1!1!2!2!2!2!}\times 4!$$

$$\Rightarrow \frac{720}{2\times 2\times 2\times 2}\times 24$$

= 1080

Q.15 Two fair dice, each with faces numbered 1,2,3,4,5 and 6, are rolled together and the sum of the numbers on the faces is observed. This process is repeated till the sum is either a prime number or a perfect square. Suppose the sum turns out to be a perfect square before it turns out to be a prime number. If p is the probability that this perfect square is an odd number, then the value of 14 p is

Q.15 दो उचित पासे, जिसकी प्रष्ठ संख्या 1,2,3,4,5 तथा 6, है प्रत्येक को एक साथ लुडकाया जाता है तथा प्रष्ठों पर संख्याओं के योगफल का निरिक्षण किया जाता है। यह प्रक्रिया तब दोहराई जाती है, जब तक कि योग एक अभाज्य संख्या या एक पूर्ण वर्ग न हो। माना योग एक अभाज्य संख्या उपस्थित होने के पहले एक पूर्ण होता है। यदि P प्रायिकता है कि इसका पूर्ण वर्ग एक विषम संख्या है, तब 14 p का मान होगा –

Ans. **8.00**

Sum is prime =
2 (1,1)
3 (1,2)(2,1)
5 (2,3)(3,2) (1,4) (4,1)
7 (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)
11 (5,6) (6,5)

P(prime) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Q.16 Let the function $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ Then the value of

$$f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + f\left(\frac{3}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$ is

Q.16 माना फलन $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ के द्वारा परिभाषित है,तब

$$f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + f\left(\frac{3}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$ का मान होगा –

Ans. **19.00**

f : [0, 1] $\to$ R

$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$

$f(1 - x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2}$

$= \frac{4}{4 + 2.4^x}$

$\Rightarrow \frac{2}{2 + 4^x}$

$\therefore$ f(x) + f(1-x) = 1

$$f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+.....+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ 19 pairs + $f\left(\frac{20}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ = 19

Q.17 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a differentiable function such that its derivative f' is continuous and $f(\pi)=-6$

If $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ is defined by $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ and if

$\int_0^{\pi}\left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx=2$ then the value of $f(0)$ is

Q.17 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि इसका अवकलज f' संतत् है तथा $f(\pi)=-6$ है। यदि

$F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ के द्वारा परिभाषित है तथा यदि

$\int_0^{\pi}\left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx=2$ है। तब f(0) का मान होगा –

Ans. 4.00

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt$$

f'(x) = f(x)

$$\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\ dx+\int_0^{\pi} \underset{I}{f(x)}\underset{II}{\cos x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\ dx+f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\ dx$$

$$\int_0^{\pi}\left(f'(x)\cos x-f(x)\sin x\right)dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cos x\right)dx=2$$

$$f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}=2$$

f(π) (-1) - f(0) = 2

6 - f(0) = 2

f(0) = 4

Q.18 Let the function $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ be defined by $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$.

Suppose the function f has a local minimum at θ precisely when $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, where $0<\ \lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. Then the value of $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ is

Q.18 माना फलन $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$ के द्वारा परिभाषित है।

माना फलन f, θ पर ठीक ठीक एक स्थानिय निम्निष्ठ रखता है। जब $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, है जहाँ $0<\ \lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. है। तब $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ का मान है।

Ans. 0.50

$f(\theta) = (1 + \sin2\theta) + (1 - \sin2\theta)^2$

$= 1 + \sin2\theta + 1 + \sin^2 2\theta - 2\sin2\theta$

$= \sin^2 2\theta - \sin2\theta + 2$

$$= \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$\theta \in [0, \pi]$

$\therefore 2\theta \in [0, 2\pi]$

$f(\theta)$ min. when $\sin2\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{12} \qquad \lambda_2 = \frac{5}{12}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} = 0.50$

JEE ADVANCED
27 September 2020
Chemistry Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full marks : +3 If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : –1 In all other cases.

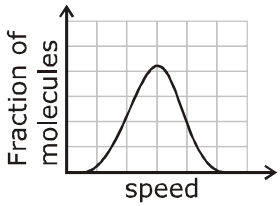
भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

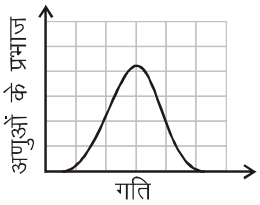
पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. If the distribution of molecular speeds of a gas is as per the figure shown below, then the ratio of the most probable, the average, and the root mean square speeds, respectively, is



यदि एक गैस का आण्विक गति का वितरण निम्नांकित चित्रानुसार है, तो अधिकतम प्रायिक वेग, औसत वेग तथा वर्ग माध्य मूल मान का अनुपात, क्रमशः हैः



(A) 1 : 1 : 1 (B) 1 : 1 : 1.224
(C) 1 : 1.128 : 1.224 (D) 1 : 1.128 : 1

Ans. B

By observing the graph we get

$u_{mps} : u_{avg} : u_{rms} = 1 : 1 : 1.224$

2. Which of the following liberates O_2 upon hydrolysis?
निम्न में से कौन जलअपघटन होने पर O_2 मुक्त करता है?
(A) Pb_3O_4 (B) KO_2 (C) Na_2O_2 (D) Li_2O_2

Ans. B

Superoxides liberate oxygen with water

$$2KO_2 + H_2O \longrightarrow 2KOH + H_2O_2 + O_2$$

3. A colorless aqueous solution contains nitrates of two metals, X and Y. When it was added to an aqueous solution of NaCl, a white precipitate was formed. This precipitate was found to be partly soluble in hot water to give a residue P and a solution Q. The residue P was soluble in aq. NH_3 and also in excess sodium thiosulfate. The hot solution Q gave a yellow precipitate with KI. The metals X and Y, respectively, are
(A) Ag and Pb (B) Ag and Cd (C) Cd and Pb (D) Cd and Zn
एक रंगहीन जलीय विलयन में दो धातुओं, X तथा Y के नाईट्रेट होते है। जब इसे NaCl के एक जलीय वियलन में मिलाया जाता है, तो एक श्वेत अवक्षेप बनता है। यह अवक्षेप एक अवशेष P तथा एक विलयन Q देने के लिए गर्म जल में आंशिक रूप से विलेय पाया गया है। अवशेष P जलीय NH_3 तथा सोडियम थायोसल्फेट के आधिक्य में भी घुलनशील है। KI के साथ गर्म विलयन Q एक पीला अवक्षेप देता है। X तथा Y धातुऐं, क्रमशः है–
(A) Ag तथा Pb (B) Ag तथा Cd (C) Cd तथा Pb (D) Cd तथा Zn

Ans. A

(1) $AgNO_3 + Pb(NO_3)_2 \xrightarrow{NaCl} AgCl + PbCl_2$

solution — white ppt — white ppt partially soluble in hot water

(2) $AgCl + NH_3 \longrightarrow [Ag(NH_3)_2]\,Cl$

(residue-p) — (soluble complex)

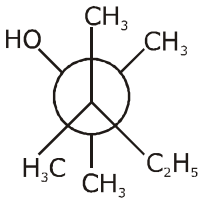
(3) $AgCl + 2Na_2S_2O_3 \longrightarrow Na_3[Ag(S_2O_3)]$

(residue-p) (excess) (soluble complex)

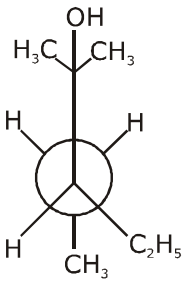
(4) $PbCl_2 + 2KI \longrightarrow PbI_2$

(hot solution-Q) — (yellow ppt)

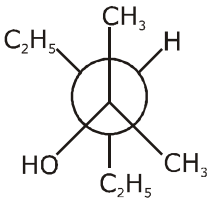
4. Newman projections P, Q, R and S are shown below :



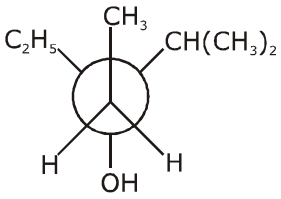
P



Q



R

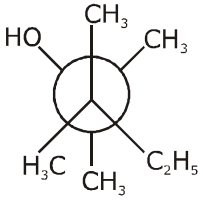


S

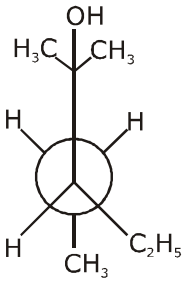
Which one of the following options represents identical molecules ?

(A) P and Q (B) Q and S (C) Q and R (D) R and S

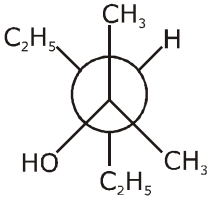
न्यूमैन प्रक्षेपण P, Q, R तथा S को निम्नानुसार दर्शाया गया है–



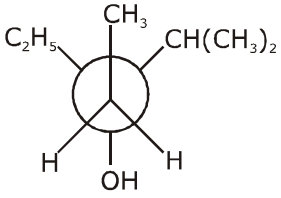
P



Q



R



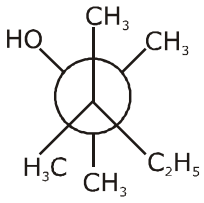
S

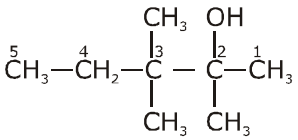
निम्न में से कौनसा एक विकल्प समान अणु प्रदर्शित करता है?

(A) P तथा Q (B) Q तथा S (C) Q तथा R (D) R तथा S

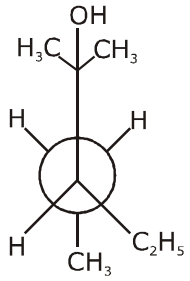
Ans. C

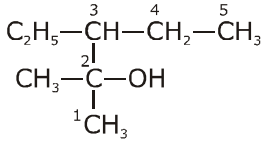
(P)



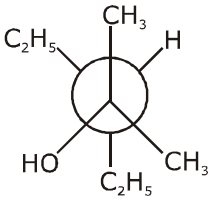


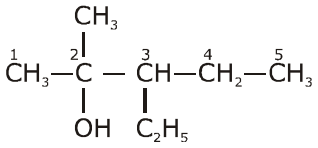
2,3,3-trimethyl Pentan-2-ol

(Q) 

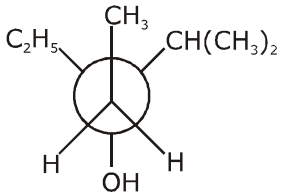


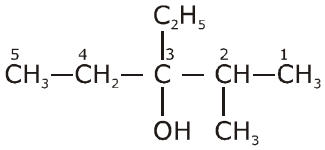
3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

(R) 



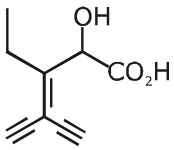
3-Ethyl-2-methyl Pentan-2-ol

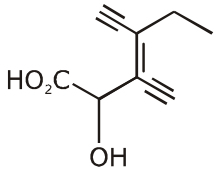
(S) 

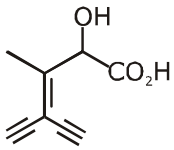


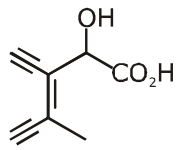
3-Ethyl-2-methyl Pentan-3-ol

5. Which one of the following structures has the IPUAC name
3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid ?
निम्न में से IPUAC नाम
3- एथिनील -2-हाइड्रॉक्सी -4- मेथिलहैक्स-3-ईन-5-आइनॉइक अम्ल वाली संरचना कौनसी है?

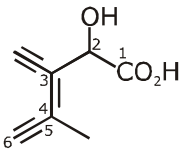
(A) 

(B) 

(C) 

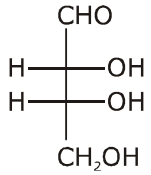
(D) 

Ans. D



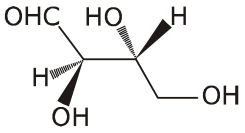
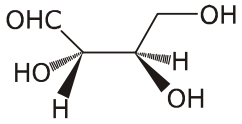
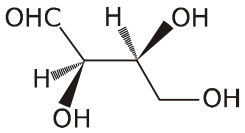
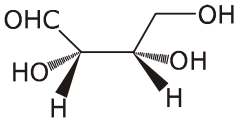
3-ethynyl-2-hydroxy-4-methylhex-3-en-5-ynoic acid

6. The Fischer projection of D-erythrose is shown below :

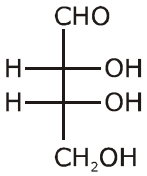


D-Erythrose

D-Erythrose and its isomers are listed as P, Q, R, and S in Column-I. Choose the correct relationship of P, Q, R, and S with D-erythrose from Column II.

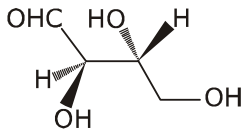
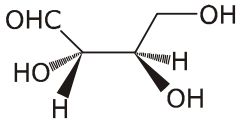
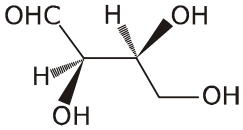
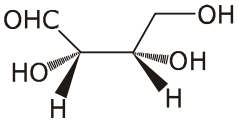
Column – I	**Column – II**
P. 	1. Diastereomer
Q. 	2. Identical
R. 	3. Enantiomer
S. 	

D-इरीथ्रो का फिशर प्रक्षेपण नीचे दर्शाया गया है।



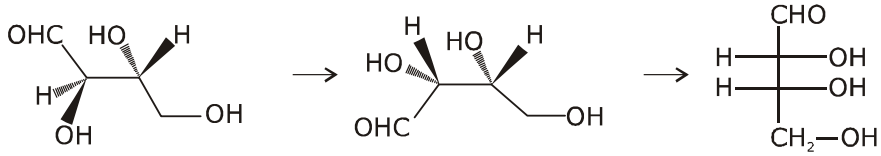
D-इरीथ्रो

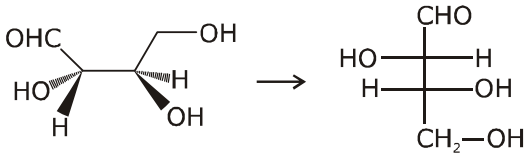
स्तम्भ -I में D- इरीथ्रो तथा इसके समावयवी P, Q, R तथा S के रूप में अंकित है। स्तम्भ II से D- इरीथ्रो वाले P, Q, R तथा S के सही सम्बन्ध का चयन कीजिये।

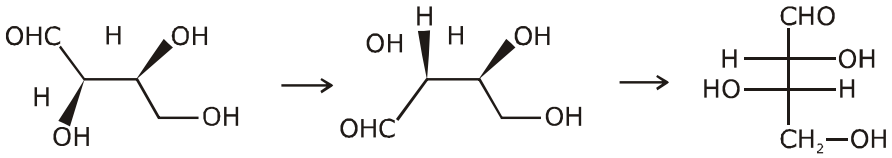
स्तम्भ – I	**स्तम्भ – II**
P. 	1. डाईस्टीरियोमर
Q. 	2. समरूप
R. 	3. प्रतिबिम्बरूपी (इनेन्शियोमर)
S. 	

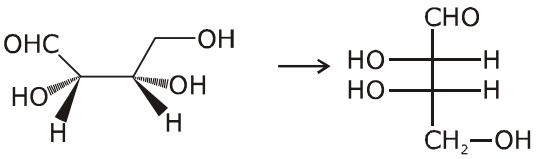
(A) P → 2, Q→ 3, R→ 2, S→ 2 (B) P → 3, Q→ 1, R→ 1, S→ 2
(C) P → 2, Q→ 1, R→ 1, S→ 3 (D) P → 2, Q→ 3, R→ 3, S→ 1

Ans. C

P. 

Q. 

R. 

S. 

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated <u>according to the following marking scheme :</u>

Full marks	: +4	If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. In thermodynamics, the P–V work done is given by $w = -\int dV\, P_{ext}$.

For a system undergoing a particular process, the work done is, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

This equation is applicable to a
(A) system that satisfies the van der Waals equation of state.
(B) process that is reversible and isothermal.
(C) process that is reversible and adiabatic.
(D) process that is irreversible and at constant pressure.

ऊष्मागतिकी में, किया गया कार्य P–V निम्न द्वारा दिया गया है $w = -\int dV\, P_{ext}$

एक विशेष प्रक्रिया से गुजरने वाले तंत्र के लिए, किया गया कार्य है, $w = -\int dV\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)$

यह समीकरण निम्न में से किसके लिए उपयुक्त है–

(A) एक तंत्र जो अवस्था की वाण्डर वाल्स समीकरण को संतुष्ट करता है।

(B) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथ समतापीय है।

(C) एक प्रक्रिया जो उत्क्रमणीय तथा रूद्धोष्म है।

(D) एक प्रक्रिया जो अनुत्क्रमणीय तथा स्थिर दाब पर है।

Ans. A,B,C

$w = -\int P_{ext.}dV$

$P_{ext.} = \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right] = P_{gas}$

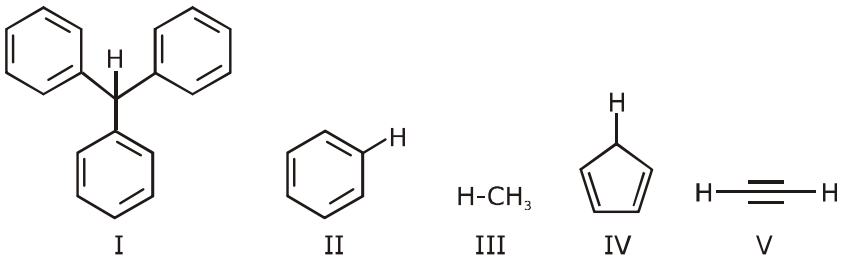
$\Downarrow$

process is reversible

$P_{gas} = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ is Van der waals equation of state.

Hence Ans. A,B,C

8. With respect to the compounds I–V, choose the correct statement(s).



I II III IV V

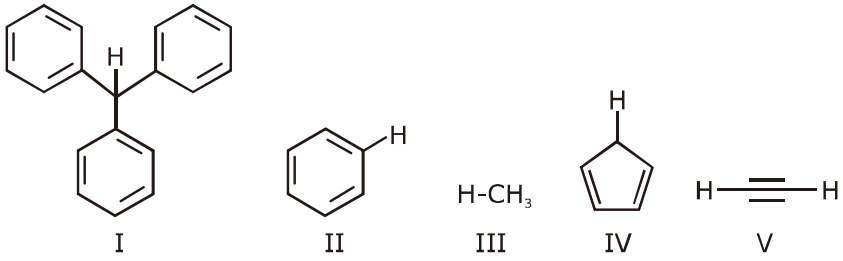
(A) The acidity of compound I is due to delocalization in the conjugate base.

(B) The conjugate base of compound IV is aromatic.

(C) Compound II becomes more acidic, when it has a $-NO_2$ substituent.

(D) The acidity of compounds follows the order I > IV > V > II > III.

यौगिक I–V के साक्षेप, सही कथन का चयन कीजिये–



I II III IV V

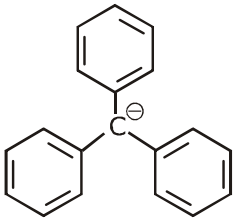
(A) यौगिक I की अम्लीयता संयुग्मी क्षार में विस्थापन के कारण होती है।

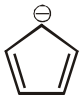
(B) यौगिक IV का संयुग्मी क्षार एरौमेटिक है।

(C) यौगिक II अधिक अम्लीय हो जाता है, जब यह एक $-NO_2$ प्रतिस्थापी रखता है।

(D) यौगिकों की अम्लीयता इस क्रमानुसार है I > IV > V > II > III.

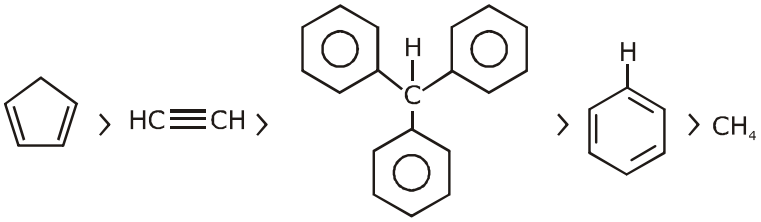
Ans. A,B,C

(A)  is a conjugate base of compound I. Which is stable by delocalisation or resonance.

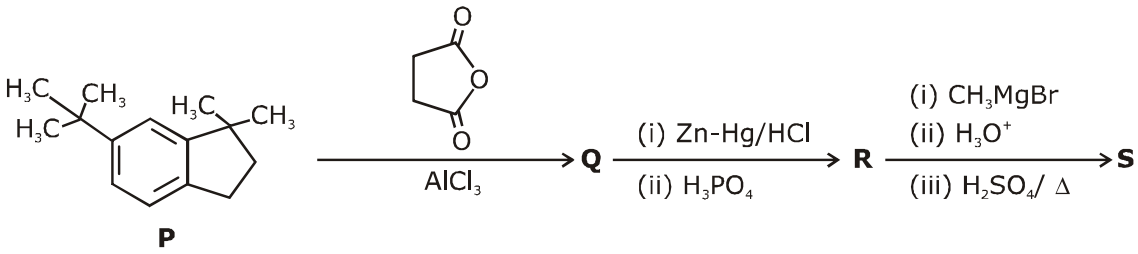
(B)  is a conjugate base of , which is aromatic compound.

(C) $-NO_2$ group is strong electron withdrawing group which increases acidic strength of compound $H-CH_3$.

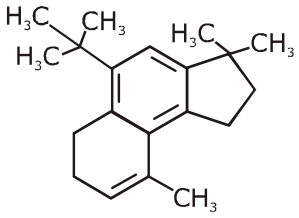
(D) The order of acidic strength

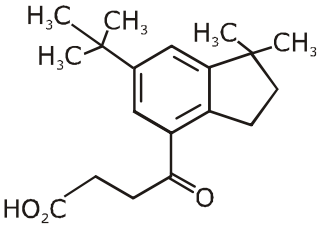


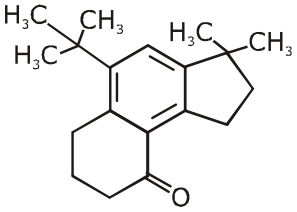
9. In the reaction scheme shown below, Q, R and S are the major products.

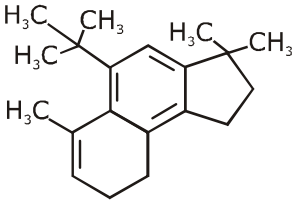


The correct structure of

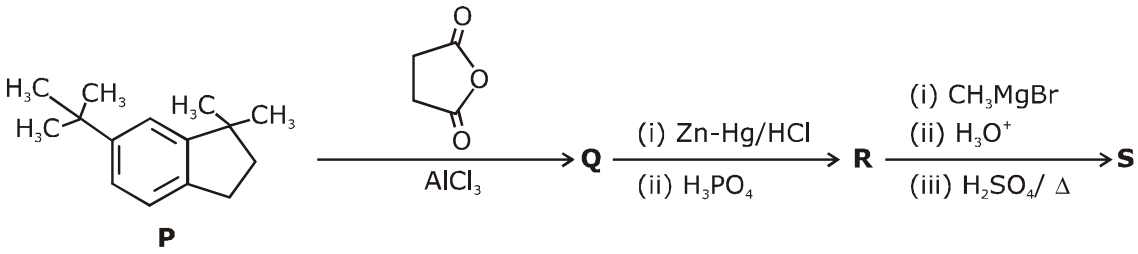
(A) S is 

(B) Q is 

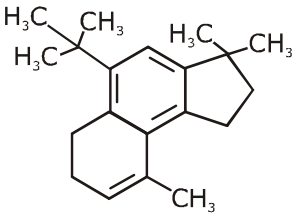
(C) R is 

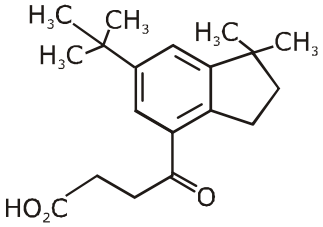
(D) S is 

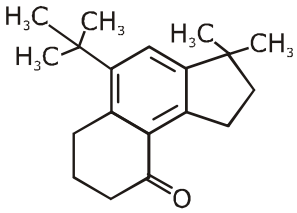
निम्नलिखित अभिक्रिया प्रक्रम में, Q, R तथा S मुख्य उत्पाद हैं।

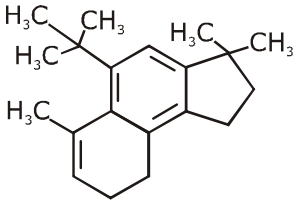


सही संरचना है–

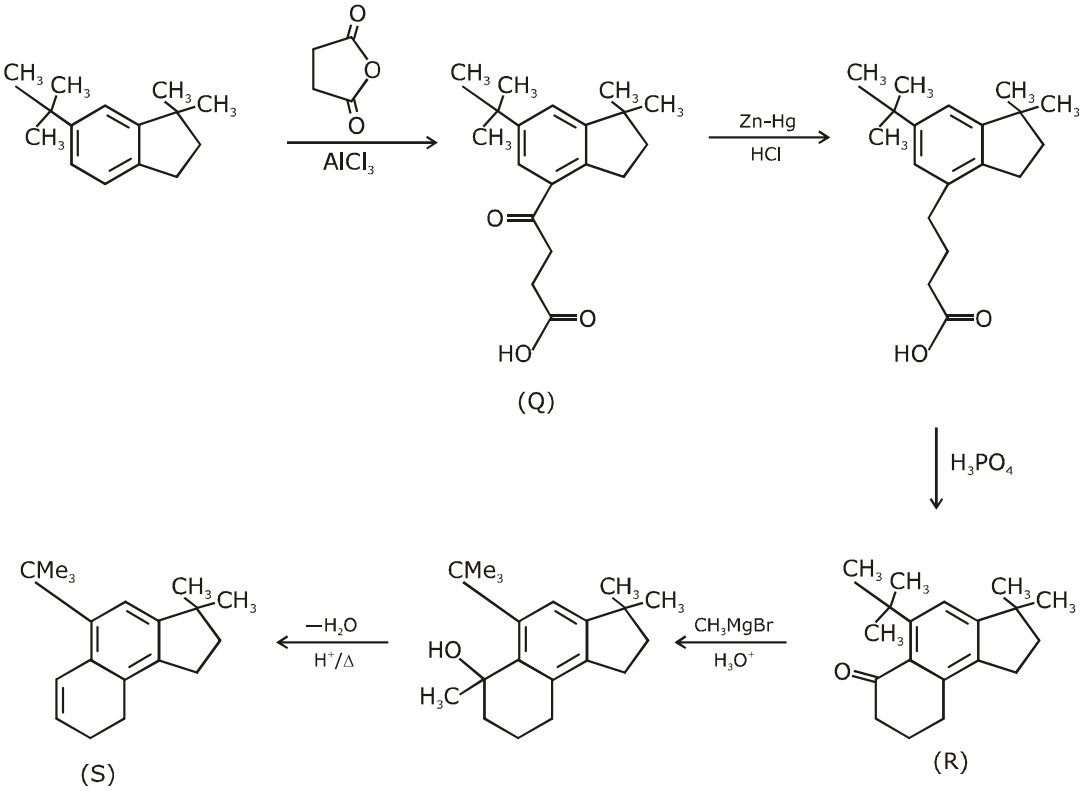
(A) S की है 

(B) Q की है 

(C) R की है 

(D) S की है 

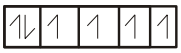
Ans. B,D

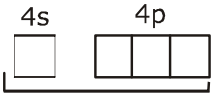


10. Choose the correct statement(s) among the following:
(A) $[FeCl_4]^-$ has tetrahedral geometry.
(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has 2 geometrical isomers.
(C) $[FeCl_4]^-$ has higher spin-only magnetic moment than $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$.
(D) The cobalt ion in $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ has sp^3d^2 hybridization.
निम्न में से सही कथन का चयन कीजिये–
(A) $[FeCl_4]^-$ चतुष्फलकीय ज्यामिति रखता है
(B) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ 2 ज्यामितीय समावयवी रखता है
(C) $[FeCl_4]^-$, $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ की अपेक्षा उच्चतम चक्रण–केवल चुम्बकीय आधूर्ण रखता है
(D) $[Co(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$ में कोबाल्ट आयन sp^3d^2 संकरण रखता है।

Ans. A,C

(A) $[FeCl_4]^-$ Cl^- is weak field ligand

Fe^{+3} = 



sp^3 - hybridization

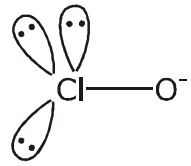
$n = 4$, $\mu_{(s)} = \sqrt{24}$

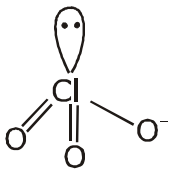
(C) $[CO(en)(NH_3)_2Cl_2]^+$
$CO^{3+} \Rightarrow (3d^6)$, $(\Delta_0 > P)$
$t_{2g}^6 e_g$, $n = 0$, $\mu = 0$
hybridization $\rightarrow d^2sp^3$

11. With respect to hypochlorite, chlorate and perchlorate ions, choose the correct statement(s).
(A) The hypochlorite ion is the strongest conjugate base.
(B) The molecular shape of only chlorate ion is influenced by the lone pair of electrons of Cl.
(C) The hypochlorite and chlorate ions disproportionate to give rise to identical set of ions.
(D) The hypochlorite ion oxidizes the sulfite ion.
हाइपोक्लोराइट, क्लोरेट तथा परक्लोरेट के सापेक्ष, सही कथन का चयन कीजिये–
(A) हाइपोक्लोराइट आयन प्रबलतम संयुग्मी क्षार है।
(B) केवल क्लोरेट आयन की आण्विक आकति Cl के एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्म द्वारा प्रभावित है।
(C) हाइपोक्लोराइट तथा क्लोरेट आयन, आयनों के समान समूहों के निर्माण के लिए विषमानुपातन करते है।
(D) हाइपोक्लोराइट आयन सल्फाइट आयन का ऑक्सीकरण करता है।

Ans. A,B,D

Acidic nature $\rightarrow HClO < HClO_3 < HClO_4$
Basic nature $\rightarrow ClO^- > ClO_3^- > ClO_4^-$

(B) 



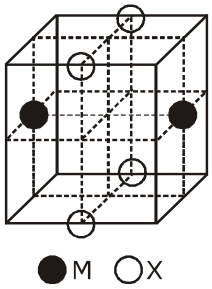
sp^3 (Linear) Sp^3 (pyramidal)

(C) $3\overset{(+1)}{O}Cl^- \xrightarrow{hot} 2Cl^- + \overset{(+5)}{Cl}O_3^-$

$4\overset{(+5)}{Cl}O_3^- \xrightarrow[\text{Lower temp.}]{\text{absence of catalyst}} 3\overset{+7}{Cl}O_4^- + \overset{(-1)}{Cl}^-$

(D) $ClO^- + SO_3^- \longrightarrow Cl^- + SO_4^{2-}$

12. The cubic unit cell structure of a compound containing cation M and anion X is shown below. When compared to the anion, the cation has smaller ionic radius. Choose the correct statement(s).
निम्नानुसार एक यौगिक की घनीय इकाई कोष्ठिका धनायन M तथा ऋणायन X युक्त है। ऋणायन की तुलना में धनायन छोटी आयनिक त्रिज्या रखता है।
सही कथन का चयन कीजिये।



(A) The empirical formula of the compound is MX.
(B) The cation M and anion X have different coordination geometries.
(C) The ratio of M-X bond length to the cubic unit cell edge length is 0.866.
(D) The ratio of the ionic radii of cation M to anion X is 0.414.
(A) यौगिक का मूलानुपाती सूत्र MX है।
(B) धनायन M तथा ऋणायन X भिन्न उपसहसंयोजक ज्यामितियां रखते है।
(C) M-X बन्ध लम्बाई तथा घनीय इकाई कोष्ठिका कोर लम्बाई का अनुपात 0.866 है।
(D) धनायन M तथा ऋणायन X की आयनिक त्रिज्या का अनुपात 0.414 है।

Ans. A,C

According to given diagram, structure seems to be B.C.C.

(1) empirical formula $\rightarrow$ MX

(2) C. No. of 'M' ion = 8 [same co-ordination Geometry]
C. No. of 'X' ion = 8 [same co-ordination Geometry]

(3) M–X Bond Length = $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$

M–X Bond Length = $a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$

$\frac{M - X\,bond\,length}{a(edge\,length)} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

(4) As it is B.C.C.

$$r_{X^-} + r_{M^+} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$0.732 \leq \frac{r_{M^+}}{r_{X^-}} < 1$$

Ans. A,C

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

  Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13. 5.00 mL of 0.10 M oxalic acid solution taken in a conical flask is titrated against NaOH from a burette using phenolphthalein indicator. The volume of NaOH required for the appearance of permanent faint pink color is tabulated below for five experiments. What is the concentration, in molarity, of the NaOH solution?

Exp. No.	Vol. of NaOH (mL)
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

0.10 M ऑक्सेलिक अम्ल विलयन का 5.00 mL एक शंक्वाकार (conical) फ्लास्क में लेकर फिनॉलफ्थैलीन सूचक का उपयोग करते हुए एक ब्यूरेट द्वारा NaOH के विरूद्ध अनुमापित किया जाता है। स्थायी गुलाबी रगं की उपस्थिति के लिए आवश्यक NaOH का आयतन पॉच प्रयोगों के लिए नीचे सारणीबद्ध है। NaOH विलयन की सान्द्रता, मोलरता में क्या है ?

प्रयोग संख्या	**NaOH** का आयतन **(mL)**
1	12.5
2	10.5
3	9.0
4	9.0
5	9.0

Ans. 0.11

$H_2C_2O_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2C_2O_4 + 2H_2O$

5ml M

0.1 M

$$M = [NaOH] = \frac{[H_2C_2O_4] \times \text{vol.} \times 2}{\text{vol. of NaOH}}$$

$$[NaOH]_1 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{12.5} = \frac{1}{12.5}$$

$$[NaOH]_2 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{10.5} = \frac{1}{10.5}$$

$$[NaOH]_3 = \frac{5 \times 0.1 \times 2}{9} = \frac{1}{9} = [NaOH]_4 = [NaOH]_5$$

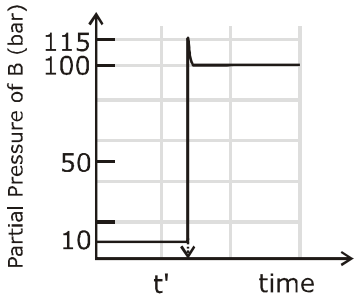
$$[NaOH] \text{ Final Result} = \frac{\frac{1}{12.5} + \frac{1}{10.5} + \frac{1}{9} \times 3}{5}$$

$$= \frac{\left[\frac{2}{25} + \frac{2}{21} + \frac{1}{3}\right]}{5}$$

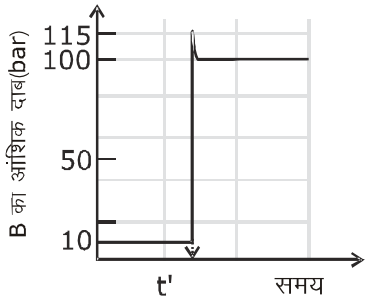
$$= \frac{0.08 + 0.095 + 0.333}{5}$$

$= 0.102 \simeq 0.11$ Ans.

14. Consider the reaction A $\rightleftharpoons$ B at 1000 K. At time 't'. the temperature of the system was increased to 2000 K and the system was allowed to reach equilibrium. Throughout this experiment the partial pressure of A was maintained at 1 bar. Given below is the plot of the partial pressure of B with time. What is the ratio of the standard Gibbs energy of the reaction at 1000 K to that at 2000 K?



1000 K पर अभिक्रिया A $\rightleftharpoons$ B पर विचार कीजिये। समय 't' पर, तंत्र का तापमान 2000 K तक बढ़ जाता है तथा तंत्र को साम्य तक पहुँचने दिया जाता है इस प्रयोग के दौरान A का आंशिक दाब 1 बार बनाए रखा गया था। नीचे समय के साथ B के आंशिक दाब का वक्र दिया गया है। 1000 K तथा 2000 K पर अभिक्रिया की मानक गिब्स ऊर्जा का अनुपात क्या है ?



Ans. **0.25**

$K_{eq.\ 2000\ K} = 100$

$K_{eq.\ 1000\ K} = 10$

$\Delta G_{2000} = -2000\ R \ln (100) = -4000\ R (\ln 10)$

$\Delta G_{1000} = -1000\ R \ln (10) = -1000\ R (\ln 10)$

$$\frac{\Delta G_{2000}}{\Delta G_{1000}} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{\Delta G_{1000}}{\Delta G_{2000}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ans. = 0.25

15. Consider a 70% efficient hydrogen-oxygen fuel cell working under standard conditions at 1 bar and 295 K. Its cell reaction is

$$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l).$$

The work derived from the cell on the consumption of 1.0×10^{-3} mol of $H_2(g)$ is used to compress 1.00 mol of a monoatomic ideal gas in a thermally insulated container. What is the change in the temperature (in K) of the ideal gas?

The standard reduction potentials for the two half-cells are given below.

$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$, $E^0 = 1.23$ V,

$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$, $E^0 = 0.00$V.

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

1 bar तथा 298 K पर मानक अवस्था में कार्यरत एक 70% दक्ष हाइड्रोजन–ऑक्सीजन ईंधन सेल पर विचार कीजिये। इस सेल की अभिक्रिया है–

$H_2(g) + O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$.

1.0×10^{-3} mol $H_2(g)$ के खपत पर सेल द्वारा व्युत्पन्न कार्य को एक ताप रोधित पात्र में 1.00 mol एकलपरमाण्विक आदर्श गैस के संपीडन में उपयोग किया जाता है।

आदर्श गैस के तापमान में परिवर्तन (K में) क्या है ?

$O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$, $E^0 = 1.23$ V,

$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$, $E^0 = 0.00$V.

Use F = 96500 C mol^{-1}, R = 8.314 J mol^{-1} K^{-1}.

Ans. 13.32

$E^0_{cell} = 1.23$ volt

$\Delta G^0 = \{-2 \times 96500 \times 1.23\}$

Energy used $= \left[2 \times 96500 \times 1.23 \times 70\% \times 10^{-3}\right]$

$= 1 \times \frac{3}{2} \times 8.314 \times (\Delta T)$

$\Delta T = \frac{4 \times 96500 \times 1.23 \times 70 \times 10^{-3}}{100 \times 3 \times 8.314}$

$= 13.32$

16. Aluminium reacts with sulfuric acid to form aluminium sulfate and hydrogen. What is the volume of hydrogen gas in liters (L) produced at 300 K and 1.0 atm pressure, when 5.4 g of aluminium and 50.0 mL of 5.0 M sulfuric acid are combined for the reaction?

(Use molar mass of aluminium as 27.0 g mol^{-1}, R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})

एल्यूमिनियम, सल्फयूरिक अम्ल के साथ क्रिया करके एल्यूमिनियम सल्फेट तथा हाइड्रोजन का निर्माण करता है 300 K तथा 1.0 atm दाब पर उत्पन्न हाइड्रोजन गैस का आयतन लीटर में (L) क्या है, जब 5.4 g एल्यूमिनियम तथा 5.0 M सल्फ्यूरिक अम्ल का 50.0 mL अभिक्रिया के लिए संयोजित होते है ?

(एल्यूमिनियम का मोलर द्रव्यमान 27.0 g mol^{-1} उपयोग कीजिये R = 0.082 atm L mol^{-1} K^{-1})

Ans. 6.15 Liter

$2Al + 3H_2SO_4 \longrightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3H_2$

0.2 mol $\quad \frac{50 \times 5}{1000} = 0.25$mol

(L.R.)

Volume = $\frac{1}{4} \times 0.082 \times 300$

$= \frac{24.6}{4}$

= 6.15 Litre.

17. $^{238}_{92}U$ is known to undergo radioactive decay to form $^{206}_{82}Pb$ by emitting alpha and beta particles. A rock initially contained 68 x 10^{-6} g of $^{238}_{92}U$. If the number of alpha particles that it would emit during its radioactive decay of $^{238}_{92}U$ to $^{206}_{82}Pb$ in three half-lives is Z × 10^{18}. then what is the value of Z?

अल्फा तथा बीटा कणों के उत्सर्जन द्वारा $^{206}_{82}Pb$ के निर्माण के लिए $^{238}_{92}U$ रेडियोधर्मी क्षय से गुजरता है। एक चट्टान (rock) प्रारम्भिक रूप से 68 x 10^{-6} g $^{238}_{92}U$ युक्त होती है। तीन अर्द्ध–आयुफालों में $^{238}_{92}U$ से $^{206}_{82}Pb$ के रेडियोधर्मी क्षय दौरान उत्सर्जित अल्फा कणों की संख्या Z × 10^{18} है, जब Z का मान क्या है ?

Ans. **1.21**

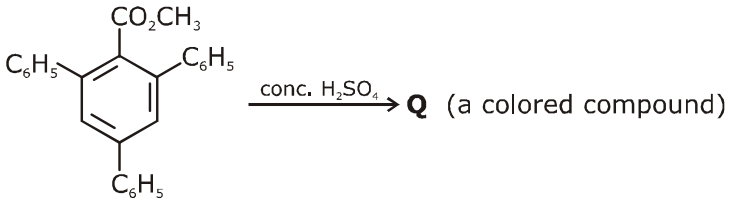
$_{92}U^{238} \longrightarrow {}_{82}Pb^{206} + 8_2He^4 + 6_{-1}\beta^0$ (antineutrino)

$\left[\frac{68 \times 10^{-6}}{238}\right] \times \frac{7}{8} \times 8 \times 6.023 \times 10^{23}$

$= \frac{68 \times 7 \times 6.023 \times 10^{+17}}{238}$

= 1.2046 × 10^{18} = 1.21

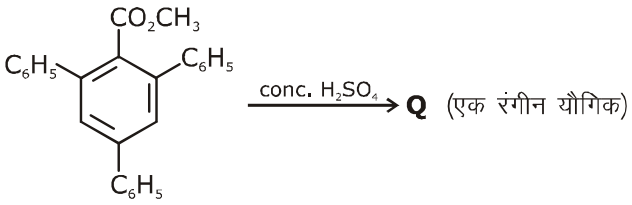
18. In the following reaction, compound Q is obtained from compound P via an ionic intermediate.



P

What is the degree of unsaturation of Q ?

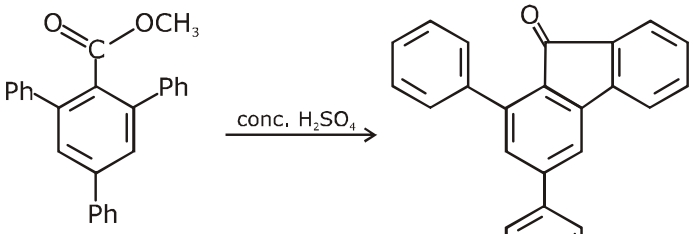
निम्न अभिक्रिया में, एक आयनिक माध्यम से यौगिक P द्वारा यौगिक Q प्राप्त किया गया है।



P

Q की असंतप्तता की मात्रा क्या है ?

Ans. 18



(Q)

Total degree of unsaturation = 18